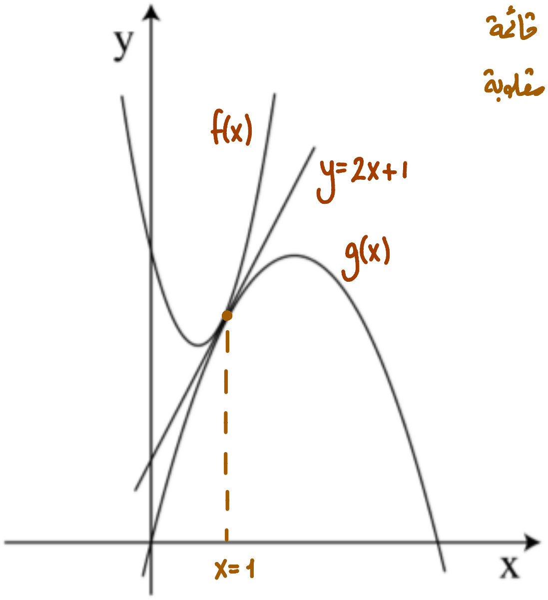
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ - سؤال ٨



٨. معطاة الدالتان : $f(x) = 3x^2 - 4x + c$ دالة تربيعية قائمة

$g(x) = -x^2 + bx$ ، دالة تربيعية مقلوبة

b وَ c هما بارامتران.

هناك مستقيم يمسّ الرسمين البيانيين للدالتين في النقطة المشتركة لهما التي فيها $x = 1$ (انظر الرسم).

أ. (١) جد قيمة b .

(٢) جد قيمة c .

عوّض قيمة b وقيمة c اللتين وجدتهما في البند "أ"، وأجب عن البندين "ب" وَ "جـ" .

ب. جد معادلة المماس المشترك للرسمين البيانيين.

جـ. S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، والمماس المشترك والمحور y .

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g(x)$ ، والمماس المشترك والمحور y .

جد النسبة $\frac{S_1}{S_2}$.

أ1. المستقيم يمس الدالتين عندما $x=1$ ← $f'(x=1)=g'(x=1)$, $g'(x)=-2x+b$, $f'(x)=6x-4$

$6\cdot1-4 = -2\cdot1+b$

$2 = -2+b$

$b=4$

أ2. عندما $x=1$ للدالتين نفس القيمة ← $f(x=1) = g(x=1)$, $g(x)=-x^2+4x$, $f(x)=3x^2-4x+c$

$3\cdot1^2-4\cdot1+c = -1^2+4\cdot1$

$-1+c = -1+4$

$c=4$

ب. ميل المماس تساوي مشتقة الدالة $f(x)$ او $g(x)$ عندما $x=1$: $m=f'(x=1)=6\cdot1-4=2$

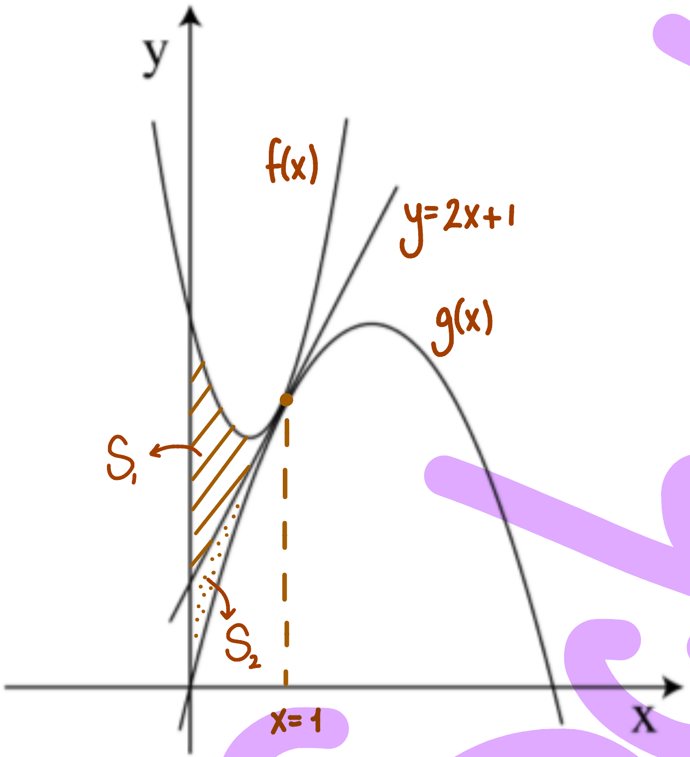
نقطة تقاطع الدالتين هو عندما $x=1$: $f(x=1)=3\cdot1^2-4\cdot1+4=3$ ← $(1,3)$ ← $y=mx+n$

$3=2\cdot1+n$

$n=1$

$y=2x+1$

ج.



$f(x)=3x^2-4x+4$

$g(x)=-x^2+4x$

$$S_1=\int_0^1 \left(f(x)-y_{\text{مماس}}\right)dx=\int_0^1\left(3x^2-4x+4-(2x+1)\right)dx=\int_0^1\left(3x^2-6x+3\right)dx$$

$$=\left(\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^1=\left(x^3-3x^2+3x\right)\Big|_0^1=\left(1^3-3\cdot1^2+3\cdot1\right)-\left(0^3-3\cdot0^2+3\cdot0\right)=1-0=1$$

$$S_2=\int_0^1\left(y_{\text{مماس}}-g(x)\right)dx=\int_0^1\left(2x+1-(-x^2+4x)\right)dx=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1^3}{3}-1^2+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}-0^2+0\right)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٨

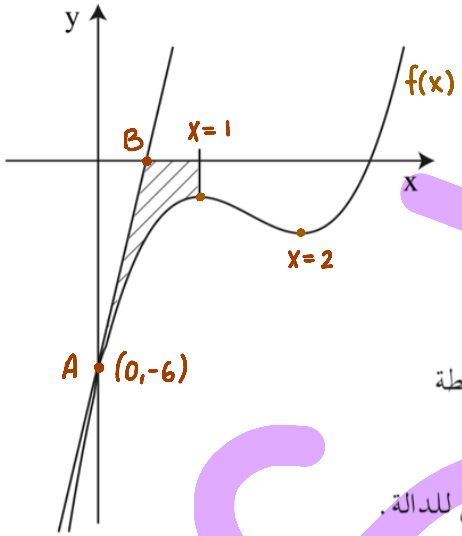
٨. يعرض الرسم الذي أمامك رسمًا تقريبيًا للدالة $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ ، a هو بارامتر.

أ. جد الإحداثيين x للنقطتين القصويين للدالة f(x) ، وبرهن أنّ إحداهما هي نهاية عظمى وأنّ الأخرى هي نهاية صغرى.

MAX MIN

ب. معطى أنّ المستقيم $y = -8x + 14$ يمرّ عبر نقطة النهاية الصغرى للدالة f(x) . جد قيمة البارامتر a .

جـ. يمرّرون مماسًا للرسم البياني للدالة f(x) في نقطة تقاطع الرسم البياني مع المحور y ، ويمرّرون عمودًا على المحور x عبر نقطة النهاية العظمى للدالة. عوّض قيمة a التي وجدتَها في البند "ب"، واحسب المساحة المحصورة بين المماس والعمود والرسم البياني للدالة f(x) والمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).



أ. نجد النقاط الحرجة للدالة f(x):

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \quad \backslash:6$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x = 2, 1$

نجد نوع النقاط الحرجة:

$f''(x) = 12x - 18$

$f''(x=1) = 12\cdot1 - 18 < 0$ MAX

$f''(x=2) = 12\cdot2 - 18 > 0$ MIN

ب. $y = -8x + 14$ يتقاطع مع الدالة f(x) عندما $x=2$ $\leftarrow$ $y_{x=2} = f(x=2)$

$-8\cdot2 + 14 = 2\cdot2^3 - 9\cdot2^2 + 12\cdot2 - a$

$-2 = 4 - a$

$a = 6$

ج. يجب ان نجد معادلة المماس للرسم البياني f(x) في نقطة تقاطع الرسم البياني مع محور y :

النقطة A : $f(0) = 2\cdot0^3 - 9\cdot0^2 + 12\cdot0 - 6 = -6$ $A(0,-6)$

ميل المماس للدالة في النقطة A : $m = f'(x=0) = 6\cdot0^2 - 18\cdot0 + 12 = 12$ $\longleftarrow$ $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$\Leftarrow$ $y = mx + n$

$-6 = 12\cdot0 + n$

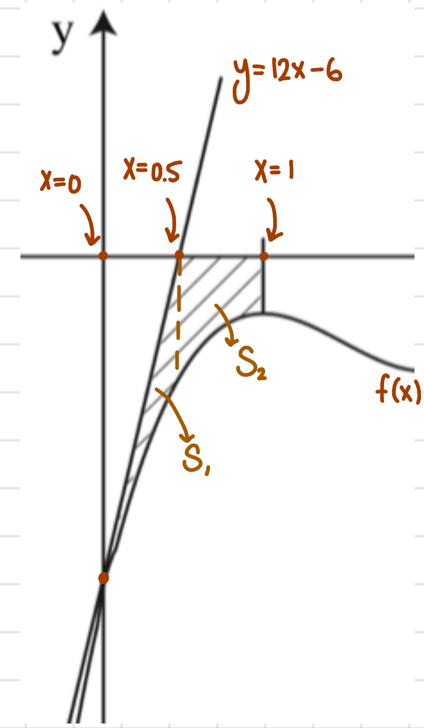
$n = -6$

$\Leftarrow$ معادلة المماس : $y = 12x - 6$

* نجد نقطة تقاطع المماس مع محور x : $0 = 12x - 6$

$12x = 6$

$x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $B(\frac{1}{2}, 0)$



$$S_1 = \int_0^{0.5} \left(y_{\text{المماس}} - f(x)\right)dx = \int_0^{0.5} \left(12x-6-(2x^3-9x^2+12x-6)\right)dx$$

$$= \int_0^{0.5} \left(\underline{12x}-\underline{\underline{6}}-2x^3+9x^2-\underline{12x}+\underline{\underline{6}}\right)dx = \int_0^{0.5} \left(-2x^3+9x^2\right)dx$$

$$= \left(-2\cdot\frac{x^4}{4}+9\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{0.5} = \left(-0.5x^4+3x^3\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$= \left(-0.5\cdot 0.5^4+3\cdot 0.5^3\right)-\left(-0.5\cdot 0^4+3\cdot 0^3\right) = \frac{11}{32} = 0.34375$$

$$S_2 = \int_{0.5}^{1} \left(x_{\text{محور}} - f(x)\right)dx = \int_{0.5}^{1} \left(0-(2x^3-9x^2+12x-6)\right)dx$$

$$= \int_{0.5}^{1} \left(-2x^3+9x^2-12x+6\right)dx = \left(-2\cdot\frac{x^4}{4}+9\cdot\frac{x^3}{3}-12\cdot\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{0.5}^{1}$$

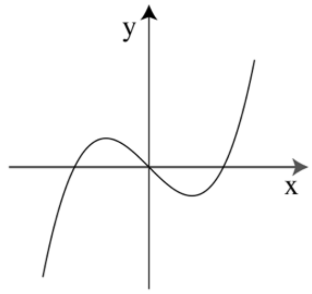
$$= \left(-0.5x^4+3x^3-6x^2+6x\right)\Big|_{0.5}^{1}$$

$$= \left(-0.5\cdot 1^4+3\cdot 1^3-6\cdot 1^2+6\cdot 1\right)-\left(-0.5\cdot 0.5^4+3\cdot 0.5^3-6\cdot 0.5^2+6\cdot 0.5\right)$$

$$= 2.5-\frac{59}{32} = \frac{21}{32} = 0.65625$$

$$\Rightarrow \text{المساحة } S = S_1+S_2 = \frac{11}{32}+\frac{21}{32} = 1$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١١ - سؤال ٨



٨. معطاة الدالة $f(x) = x^3 - ax$ (انظر الرسم).

a هو بارامتر.

أ. المستقيم الذي يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$

في النقطة التي فيها $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، يوازي المحور x . الميل صفر

جد قيمة a .

$f(x) = x^3 - x$

عوّض قيمة a التي وجدتَها، وأجب عن البندين "ب" – "جـ".

ب. (١) جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .

(٢) حسب الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، حدّد المجالات التي تكون فيها $f(x)$ سالبة

والمجالات التي تكون فيها $f(x)$ موجبة.

(٣) مشتقّة الدالة $g(x)$ تحقّق $g'(x) = f(x)$.

($f(x)$ هي دالة مشتقّة $g(x)$.)

جد الإحداثيات x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$ ، وحدّد نوعها.

علّل.

MAX $x=0$

جـ. المستقيم $y = -7$ يمسّ الرسم البياني للدالة $g(x)$ في نقطة نهايتها العظمى. ← $MAX(0,-7)$

جد الدالة $g(x)$.

أ. ميل الدالة عندما $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ هو صفر. $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - a$ ← $3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - a = 0$

$a = 1$ ← $1 = \frac{3\cdot 3}{9} = a$

ب1. تقاطع مع محور y : $f(0) = 0^3 - 0 = 0$ $(0,0)$

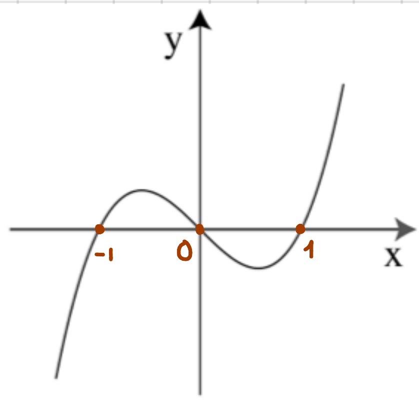
تقاطع مع محور x :

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x(x+1)(x-1) = 0$

$x = 0, 1, -1$ ← $(0,0)$ $(1,0)$ $(-1,0)$



ب2. المجال به الدالة موجبة : $0 > x > -1$ أو $x > 1$

المجال به الدالة سالبة : $x < -1$ أو $1 > x > 0$

ب3. $g'(x) = f(x)$ ← (رسمة الدالة $f(x)$ هي رسمة المشتقة للدالة $g(x)$)

نرتّب بجدول الخط حسب الرسم البياني :

	$x<-1$	$x=-1$	$0>x>-1$	$x=0$	$1>x>0$	$x=1$	$x>1$
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗

جـ. $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = \int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$

نعوّض $(0,-7)$ ← $-7 = \frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + c$ ← $c = -7$ ⇐ $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 7$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٩

٩. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + a$

(انظر الرسم). a هو بارامتر.

أ. جد مجال تعريف الدالة،

وخطوط تقارب الدالة،

الموازية للمحورين.

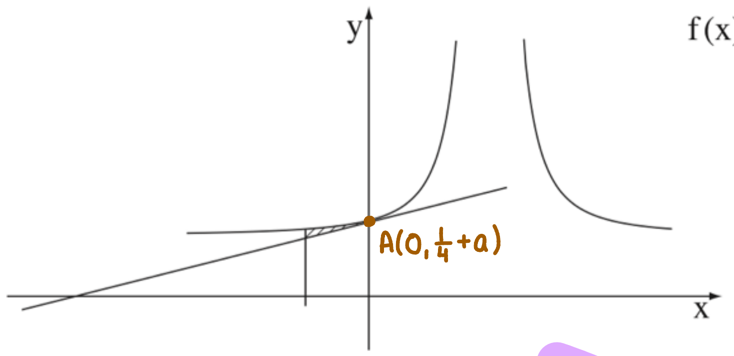
(عبّر بدلالة a حسب الحاجة.)

ب. مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البياني للدالة في نقطة تقاطعها مع المحور y .

(١) عبّر بدلالة a عن الإحداثي y لنقطة التماس، وعن معادلة المماس.

(٢) جد المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمماس

والمستقيم $x = -1$ (المساحة المخطّطة في الرسم). جد قيمة عددية.



$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+4}+a$

$f(x)=\frac{1+ax^2-4ax+4}{x^2-4x+4}$

$f(x)=\frac{ax^2-4ax+4}{x^2-4x+4}$

أ. مجال التعريف لدوال نسبية هو المقام $\neq 0$: $(x-2)^2 \neq 0$ ← م.ت: $x \neq 2$

خط تقارب عامودي : $x=2$ (عكس مجال التعريف) ، خط تقارب افقي $y=a$ (اكبر قوى لـ x بالمقام والبسط متساوي لذلك نقسم على معاملات x^2)

ب1. نقطة التماس هو نقطة تقاطع الدالة $f(x)$ مع محور y : نعوّض $x=0$

$f(0)=\frac{1}{(0-2)^2}+a=\frac{1}{4}+a$ $\Rightarrow$ $(0,\frac{1}{4}+a)$

ميل المماس للمماس هو مشتقة الدالة $f(x)$ عندما $x=0$:

$f'(x)=\frac{0\cdot(x-2)^2-2\cdot(x-2)\cdot1\cdot1}{(x-2)^4}=\frac{-2x+4}{(x-2)^4}$

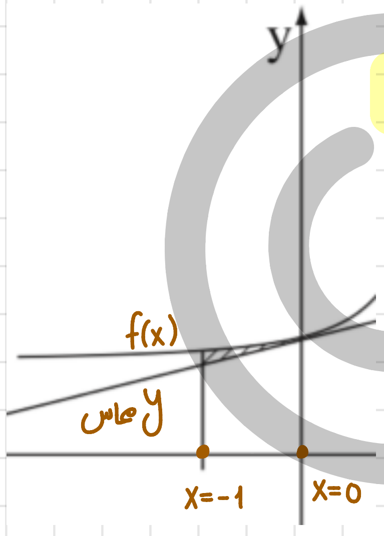
$f'(x=0)=\frac{-2\cdot0+4}{(0-2)^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=m_{\text{المماس}}$ $\Rightarrow$ $y=mx+n$ $\quad m=\frac{1}{4}$ $\quad (0,\frac{1}{4}+a)$

$\frac{1}{4}+a=\frac{1}{4}\cdot0+n$

$\frac{1}{4}+a=n$

$\Leftarrow$ $y_{\text{المماس}}=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}+a\right)$

ب2.



$S_{\text{مخطط}}=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_{\text{المماس}}\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{(x-2)^2}+a-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+a\right)\right)dx$

$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)dx=\left(\frac{1}{-(x-2)^1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x\right)\Big|_{-1}^{0}$

$=\left(\frac{-1}{x-2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}=\left(\frac{-1}{0-2}-\frac{0^2}{8}-\frac{0}{4}\right)-\left(\frac{-1}{-1-2}-\frac{(-1)^2}{8}-\frac{-1}{4}\right)$

$=0.5-\frac{11}{24}=\frac{1}{24}=0.04167$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٨

8. معطاة الدالتان: $f(x) = \sqrt{12-3x}$

$g(x) = -\sqrt{12-3x}$

أ. جد مجال تعريف الدالتين.

ب. جد مجالات تصاعد وتنازل كلّ واحدة من الدالتين (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

جـ. جد نقاط تقاطع كلّ واحدة من الدالتين مع المحورين.

د. ارسم في هيئة محاور واحدة بخطّ متواصل (—) رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $f(x)$، وارسم بخطّ متقطّع (---) رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $g(x)$.

هـ. مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x=1$، ومرّروا مستقيمًا آخر يمسّ الرسم البياني للدالة $g(x)$ في النقطة التي فيها $x=1$.

(1) جد إحداثيات نقطة التقاء المماسين.

(2) جد مساحة المثلث المحصور بين المماسين والمستقيم $x=1$.

أ. للدالتين نفس التعبير تحت الجذر اي لهم نفس مجال التعريف:

$12-3x \geq 0$

$12 \geq 3x$

$4 \geq x$

$(x \leq 4)$

* نقطة طرف $x=4$

$g(4)=0 \quad (4,0)$

$f(4)=0 \quad (4,0)$

ب. نفحص كل دالة:

$\boxed{f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{12-3x}}}=0 \Big\backslash \cdot 2\sqrt{12-3x}$

$-3 \neq 0$

لا توجد نقاط قصوى للدالة

$\boxed{g'(x)=\frac{-(-3)}{2\sqrt{12-3x}}}=0 \Big\backslash \cdot 2\sqrt{12-3x}$

$3 \neq 0$

لا يوجد نقاط قصوى للدالة

	$x<4$	$x=4$	$x>4$
f'	$-$	/////	/////
f	↘	$(4,0)$	/////

المشتقة دائمًا سالبة!

	$x<4$	$x=4$	$x>4$
g'	$+$	/////	/////
g	↗	$(4,0)$	/////

المشتقة دائمًا موجبة!

$\Rightarrow$ دالة $f(x)$: تصاعدي: $\emptyset$ ، تنازلي: $x<4$

دالة $g(x)$: تصاعدي: $x<4$ ، تنازلي: $\emptyset$

ج. دالة $f(x)$

تقاطع مع y: $f(0)=\sqrt{12} \rightarrow (0,\sqrt{12})$

تقاطع مع x: $\sqrt{12-3x}=0 \quad /^2$

$12-3x=0$

$3x=12$

$x=4 \rightarrow (4,0)$

دالة $g(x)$

تقاطع مع y: $g(0)=-\sqrt{12} \rightarrow (0,-\sqrt{12})$

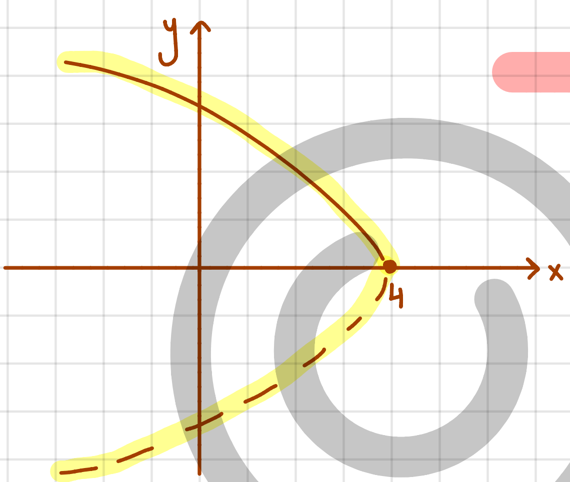
تقاطع مع x: $-\sqrt{12-3x}=0 \quad /^2$

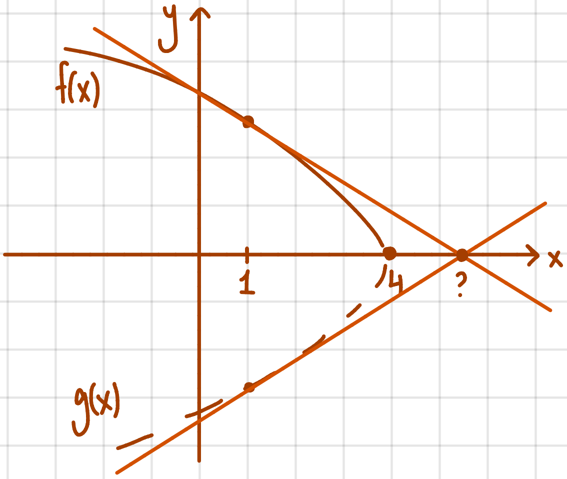
$12-3x=0$

$3x=12$

$x=4 \rightarrow (4,0)$

د.





ه. (1) نجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ عندما $x=1$:

الميل $m = f'(1) = \frac{-3}{2\sqrt{12-3\cdot1}} = \frac{-3}{6} = -0.5$

نقطة $f(1)=\sqrt{12-3\cdot1} = 3$ $\quad (1,3)$

$\Leftarrow$
$$y=mx+n$$
$$3=-0.5\cdot1+n$$
$$n=3.5$$

$\Leftarrow$ معادلة المماس: $y=-0.5x+3.5$

نجد معادلة المماس للدالة $g(x)$ عندما $x=1$:

الميل $m = g'(1) = \frac{+3}{2\sqrt{12-3\cdot1}} = \frac{3}{6} = 0.5$

نقطة $g(1)=-\sqrt{12-3\cdot1} = -3$ $\quad (1,-3)$

$\Leftarrow$
$$y=mx+n$$
$$-3=0.5\cdot1+n$$
$$n=-3.5$$

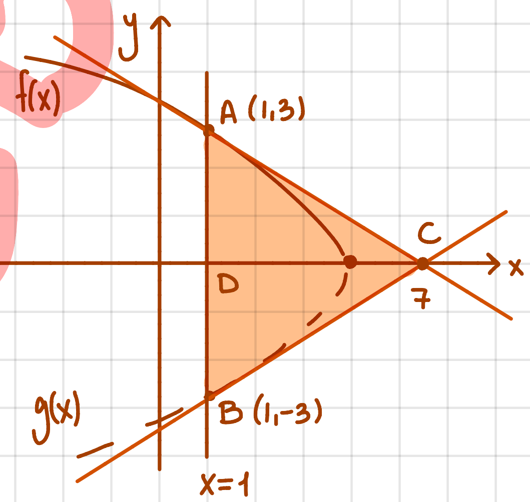
$\Leftarrow$ معادلة المماس: $y=0.5x-3.5$

نقطة التقاء المماسين : $0.5x-3.5=-0.5x+3.5$

$x=7$

$y=0.5\cdot7-3.5=0 \rightarrow (7,0)$

ه.2



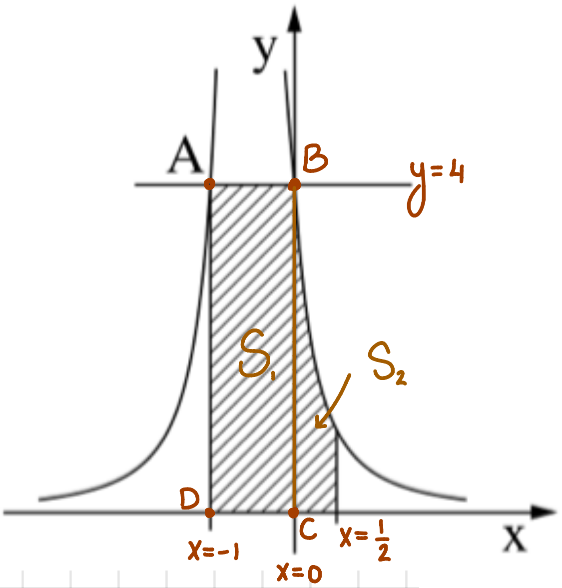
المساحة المطلوبة

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot CD}{2} = \frac{6\cdot6}{2} = 18$ وحدة مساحة

$AB = y_A - y_B = 3-(-3) = 6$

AB يتعامد محور x $\leftarrow$ CD ارتفاع

$CD = x_C - x_D = 7-1 = 6$



9. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البياني

للدالة $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة. المقام $\neq 0$ م.ت: $x \neq -\frac{1}{2}$

ب. جد خطوط تقارب الدالة، المعامدة للمحورين.

جـ. مرّروا عبر نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y مستقيمًا يوازي المحور x .

يقطع هذا المستقيم الرسم البياني للدالة في نقطة إضافية، A (انظر الرسم).

(1) جد إحداثيات النقطة A .

(2) مرّروا عبر النقطة A عمودًا على المحور x .

جد المساحة المحصورة بين العمود والمستقيم الموازي والرسم البياني للدالة والمستقيم $x = \frac{1}{2}$ والمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).

ب. خط تقارب عاموديّ: $x=-\frac{1}{2}$ خط تقارب افقي: $y=0$ (اعلى قوى للمتغيّر بالمقام اكبر من البسط)

ج1. نجد نقطة تقاطع الدالة مع محور y : $f(x=0)=\frac{4}{(2\cdot0+1)^2}=4 \leftarrow B(0,4)$

A و B لهم نفس الاحداثي y (AB يوازي محور x)، نجد النقطة A :

$$4=\frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$4(2x+1)^2 = 4 \quad /:4$$

$$(2x+1)^2 = 1$$

$$4x^2+4x+1 = 1$$

$$4x^2+4x = 0$$

$$4x(x+1) = 0$$

$$x=0 \quad x=-1 \longrightarrow A(-1,4)$$

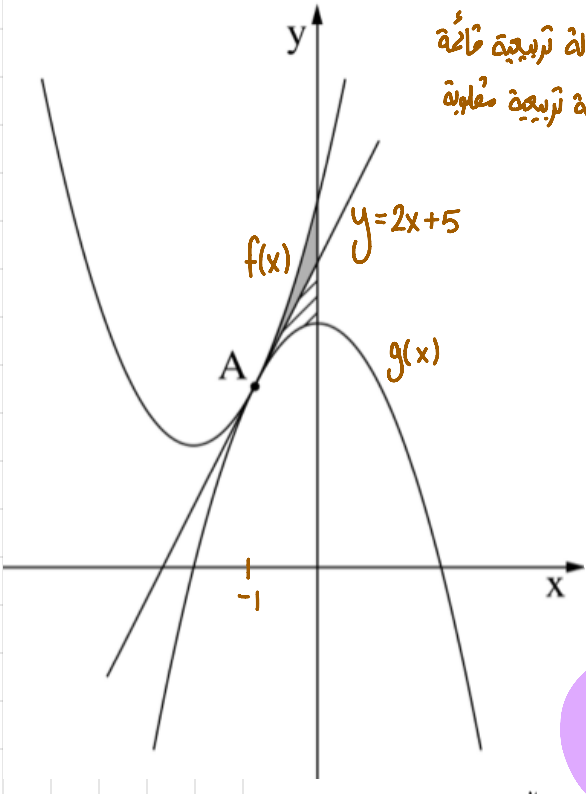
ج2.

$S_1 = S_{ABCD} = BC\cdot DC = 4\cdot 1 = 4$ وحدة مساحة

$$S_2 = \int_0^{0.5} f(x)\,dx = \int_0^{0.5} \frac{4}{(2x+1)^2}\,dx = \left(4\cdot\frac{-1}{(2x+1)^1\cdot 2\cdot 1}\right)\Big|_0^{0.5} = \left(\frac{-2}{2x+1}\right)\Big|_0^{0.5}$$

$= \frac{-2}{2\cdot0.5+1} - \frac{-2}{2\cdot0+1} = -1 - -2 = 1$ وحدة مساحة

$S_{المخطط} = S_1+S_2 = 4+1 = 5$ وحدة مساحة



8. يعرض الرسم الذي أمامك قطعين مكافئين: $f(x) = x^2 + 4x + 6$ دالة تربيعية قائمة

$g(x) = -x^2 + c$ دالة تربيعية مقلوبة

c هو بارامتر.

يمسّ القطعان المكافئان أحدهما الآخر في النقطة A .

مرّروا عبر النقطة A مماسًا مشتركًا للقطعين المكافئين

(انظر الرسم).

أ. (1) ارمز بـ t إلى الإحداثي x للنقطة A ،
وعبّر بدلالة t عن ميل المماس المشترك.
عبّر بطريقتين.

(2) جد إحداثيات النقطة A .

(3) جد قيمة البارامتر c .

ب. المماس المشترك يقسّم المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين والمحور y
إلى مساحتين (المساحة الرماديّة والمساحة المخطّطة في الرسم).
عوّض قيمة البارامتر c التي وجدتها، وبيّن أنّ المساحتين متساويتان.

أ1. ميل مماس لدالة عندما $x=t$ هو تعويض $x=t$ بمشتقة الدالة.

طريقة 1 $f'(x)=2x+4 \quad f'(x=t)=2t+4$

طريقة 2 $g'(x)=-2x \quad g'(x=t)=-2t$

أ2. المماس مشترك للدالتين لذلك يتحقق $f'(x=t)=g'(x=t)$

$2t+4=-2t$

$4t=-4$

$t=-1$ (الإحداثي x للنقطة A) ← $f(x=-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+6=3$

نعوض بمعادلة الدالة f(x) لإيجاد الإحداثيات y :

$A(-1,3)$

أ3. النقطة A تقع على الرسم البياني للدالة g(x) , نعوضها:

$g(x)=-x^2+c$

$3=-(-1)^2+c$

$3=-1+c$

$c=4$ ←

ب. نجد معادلة المماس المشترك. نعلم حسب (أ1) انّ ميله $m=-2t=2$, ويمر عبر $A(-1,3)$: $y=mx+n$

$3=2\cdot(-1)+n$ → $n=5$

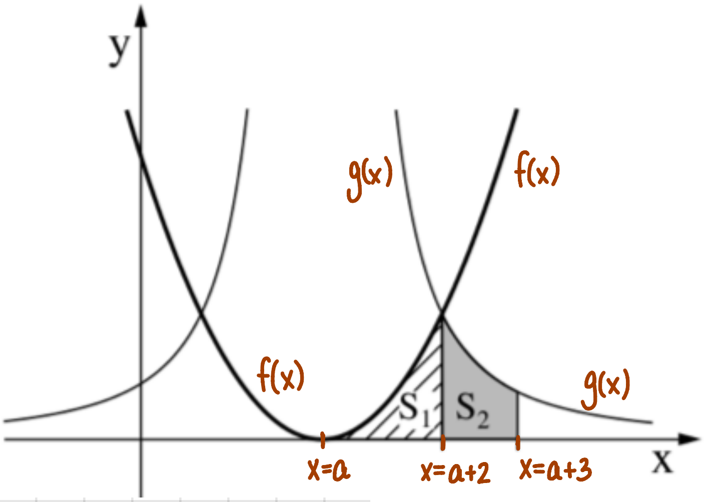
$y=2x+5$

$$S_{\text{رمادي}}=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_{\text{مماس}}\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+4x+6-(2x+5)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx$$

$=$

$$S_{\text{مخطط}}=\int_{-1}^{0}\left(y_{\text{مماس}}-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2x+5-(-x^2+4)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٨



8. يعرض الرسم الذي أمامك الرسمين البيانيّين

للدالّتين: $f(x) = (x-a)^2$ دالة تربيعية

$g(x) = \frac{16}{(x-a)^2}$ دالة نسبية

a هو بارامتر أكبر من 0 .

أ. جد خطوط التقارب الموازية

للمحورين للدالّة $g(x)$ (عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة).

إحدى نقاط التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين هي النقطة التي فيها $x = a + 2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحور x

والمستقيم $x = a + 2$ (المساحة المخطّطة في الرسم).

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ والمحور x

والمستقيمين $x = a + 2$ وَ $x = a + 3$ (المساحة الرماديّة في الرسم).

ب. احسب النسبة $\frac{S_1}{S_2}$.

أ. خط تقارب عامودي $g(x)$: $x=a$

خط تقارب افقي : $y=0$

(القوى المتغيّر بالمقام اكبر)

ب. نجد نقطة تقاطع الدالة التربيعية مع محور x : $(x-a)^2=0$

$x=a$

$(a,0)$

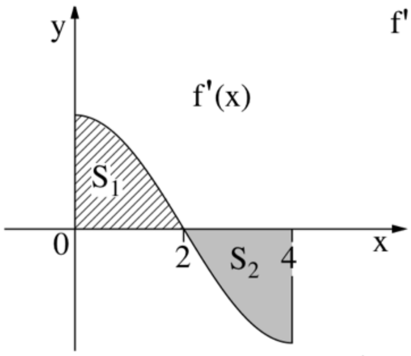
$$S_1=\int_a^{a+2} f(x)dx = \int_a^{a+2}(x-a)^2dx = \left(\frac{(x-a)^3}{3\cdot 1}\right)\Big|_a^{a+2} = \frac{(a+2-a)^3}{3} - \frac{(a-a)^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$S_2=\int_{a+2}^{a+3} g(x)dx = \int_{a+2}^{a+3}\frac{16}{(x-a)^2}dx = \left(\frac{16\cdot(-1)}{(x-a)^1}\right)\Big|_{a+2}^{a+3} = \left(\frac{-16}{x-a}\right)\Big|_{a+2}^{a+3} = \frac{-16}{a+3-a} - \frac{-16}{a+2-a}$$

$$= \frac{-16}{3} + \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = 1$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٩



9. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $0 \le x \le 4$.

الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ يقطع المحور x في النقطة التي فيها $x = 2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحورين (المساحة المخطّطة في الرسم).

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x والمستقيم $x = 4$ (المساحة الرماديّة في الرسم).

أ. (1) معطى أنّ: $f(0) = 0$ ، $S_1 = 4$.

احسب $f(2)$.

(2) معطى أيضًا أنّ: $S_2 = 4$.

احسب $f(4)$.

ب. جد إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى، وحدّد نوع هذه النقطة. علّل.

جـ. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى.

أ1. $S_1 = \int_0^2 f'(x)\,dx = \left(f(x)\right)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) \longrightarrow f(2) - f(0) = S_1$

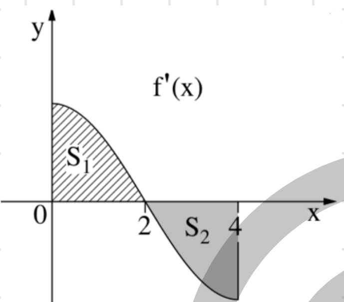
$f(2) - 0 = 4$

$f(2) = 4 \longrightarrow (2,4)$

أ2. $S_2 = -\int_2^4 f'(x)\,dx = -\left(f(x)\right)\Big|_2^4 = -\left(f(4) - f(2)\right) \longrightarrow -f(4) + f(2) = S_2$

$-f(4) + 4 = 4$

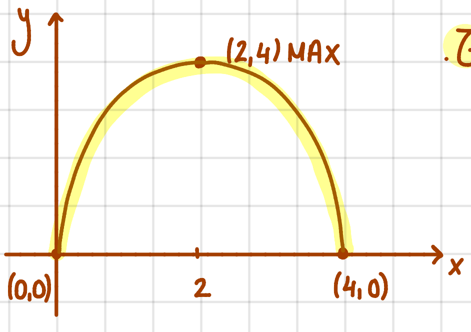
$f(4) = 0 \longrightarrow (4,0)$



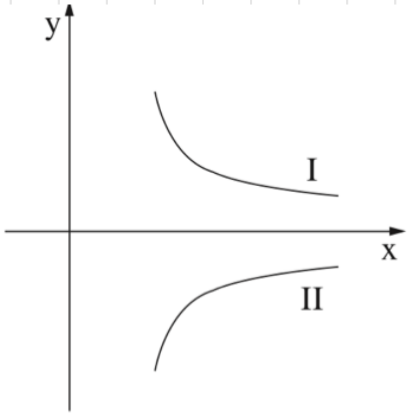
ب. النقاط القصوى الداخلية تحقّق $f'(x)=0$, اي عندما الرسم البياني للمشتقة تقطع محور x.
حسب الرسمه, عندما $x=2$ للدالة يوجد نقطة قصوى. حسب البند أ1 النقطة $(2,4)$.
نوع النقطة :

	$2>x>0$	$x=2$	$4>x>2$
f'	+	0	−
f	↗	MAX	↘

جـ.



نعتمد على المعطيات
(0,0)
(4,0)
(2,4) MAX



8. الرسمان البيانيّان I وَ II اللذان في الرسم هما للدالّتين:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$

$$g(x) = -\frac{2}{\sqrt{2x-3}} \,.$$

أ. (1) جد مجال تعريف كلّ واحدة من الدالّتين.

(2) ما هو خطّ التقارب العموديّ لكلّ واحدة من الدالّتين؟

ب. أيّ رسم بيانيّ هو للدالّة $f(x)$، وأيّ رسم بيانيّ هو للدالّة $g(x)$؟ علّل.

جـ. المستقيم $y = 2$ يقطع الرسم البيانيّ I في النقطة A.

المستقيم $y = -2$ يقطع الرسم البيانيّ II في النقطة B.

جد المساحة المحصورة بين المستقيم AB والرسمين البيانيّين للدالّتين والمستقيم $x = 3$.

أ1. للدالتين نفس المقام ونفس التعبير الجبري تحت الجذر. م.ت: $2x-3>0$
(لهم نفس مجموعة التعريف) $2x>3$
$x>1.5$

أ2. للدالتين خط تقارب العامودي: $2x-3=0 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=1.5$

ب.

$(I)\quad f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-3}} > 0$
دائماً موجب
أي دائماً فوق محور x

$(II)\quad g(x)=\frac{-2}{\sqrt{2x-3}} < 0$
دائماً سالب
أي دائماً تحت محور x

ج. نجد النقطة A (تقاطع $y=2$ مع $f(x)$):

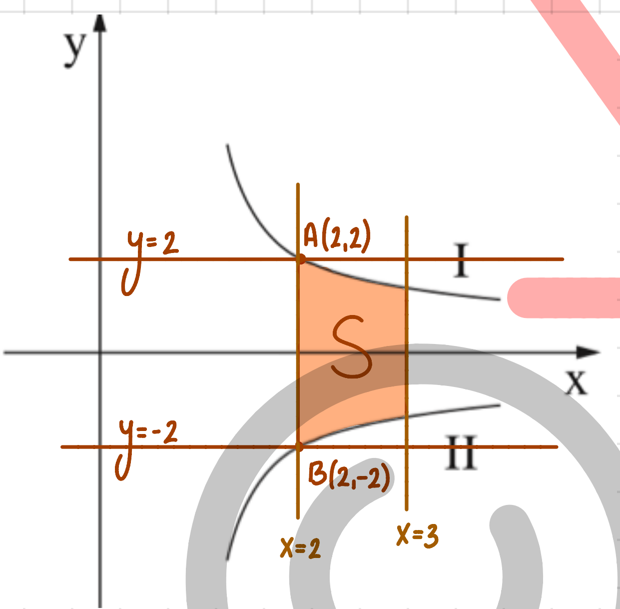
$$\frac{2}{\sqrt{2x-3}} = 2 \quad \Big\backslash \cdot\sqrt{2x-3}$$

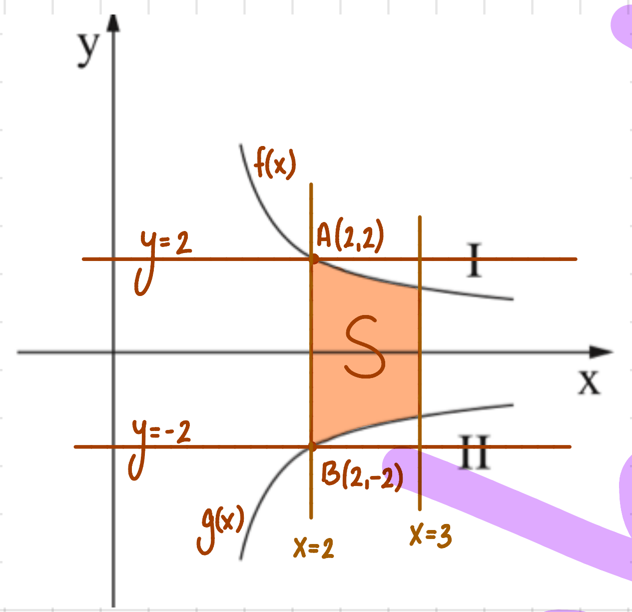
$$2 = 2\cdot\sqrt{2x-3} \quad \Big|^2$$
$$4 = 4\cdot(2x-3)$$
$$4 = 8x-12 \rightarrow 16 = 8x$$
$$x = 2 \rightarrow A(2,2)$$

نجد النقطة B (تقاطع $y=-2$ مع $g(x)$):

$$\frac{-2}{\sqrt{2x-3}} = -2 \quad \Big\backslash \cdot\sqrt{2x-3}$$

$$-2 = -2\cdot\sqrt{2x-3} \quad \Big|^2$$
$$4 = 4\cdot(2x-3)$$
$$4 = 8x-12 \rightarrow 16 = 8x$$
$$x = 2 \rightarrow B(2,-2)$$

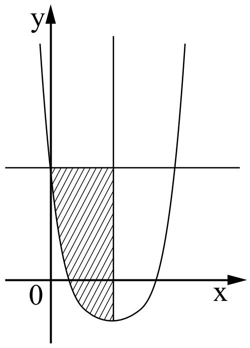




$$S=\int_2^3 \left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_2^3\left(\frac{2}{\sqrt{2x-3}}-\frac{-2}{\sqrt{2x-3}}\right)dx=\int_2^3\frac{4}{\sqrt{2x-3}}\,dx$$

$$=\left(\frac{4\cdot 2\cdot\sqrt{2x-3}}{2}\right)\Bigg|_2^3=\left(4\sqrt{2x-3}\right)\Bigg|_2^3=\left(4\cdot\sqrt{2\cdot 3-3}\right)-\left(4\cdot\sqrt{2\cdot 2-3}\right)=4\sqrt{3}-4=2.928$$

السؤال 7



معطاة الدالّة $f(x) = (2x-2)^4 - 3$.

عبر نقطة النهاية الصغرى للدالّة

مرّروا مستقيمًا يعامد المحور x ،

وعبر نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور y

مرّروا مستقيمًا يوازي المحور x (انظر الرسم) .

أ . ما هو مجال تعريف الدالّة؟

ب . جد معادلة العمود ومعادلة الموازي .

جـ . احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة والعمود والموازي،
المساحة المخطّطة في الرسم .

إجابة السؤال 7

أ . الدالّة $f(x)$ معرَّفة لكلّ x .

ب . مشتقّة الدالّة $f(x)$: $f'(x) = 4(2x-2)^3 \cdot 2 = 8(2x-2)^3$

اعتمادًا على الرسم البيانيّ للدالّة

الإحداثيّ x لنقطة النهاية الصغرى : $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Downarrow$

معادلة العمود : $x = 1$

$f(0) = (-2)^4 - 3 = 13$

$\Downarrow$

معادلة الموازي : $y = 13$

جـ . $$S = \int_0^1 [13 - f(x)]\,dx = \int_0^1 \left[13 - (2x-2)^4 + 3\right]dx = \left[16x - \frac{1}{2}(2x-2)^5 \cdot \frac{1}{5}\right]_0^1$$

$\Downarrow$

$S = 12.8$

/ يتبع في صفحة 13 /

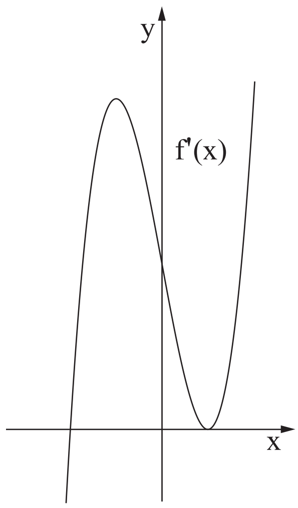
السؤال 7

$f(x)$ هي دالّة معرَّفة لكلّ x .

الرسم الذي أمامك يعرض الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ يمرّ

عبر النقطتين: $(-2 , 0)$ ، $(1 , 0)$.



أ. (1) حسب الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$،
جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

(2) ما هو الإحداثيّ x للنقطة القصوى
للدالّة $f(x)$ ، وما هو نوع النقطة القصوى؟ علّل.

(3) معطى أنّ دالّة المشتقّة هي
$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
الإحداثيّ y للنقطة القصوى للدالّة $f(x)$ هو -10 .
جد الدالّة $f(x)$.

ب. جد إحداثيّات النقاط التي فيها ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو 0.

إجابة السؤال 7

أ. (1) حسب الرسم البيانيّ المعطى، دالّة المشتقّة $f'(x)$
تساوي صفرًا في النقطتين اللتين إحداثيّهما الـ x
هو $x = 1$ وَ $x = -2$.
تركيز إشارات $f'(x)$ في جدول:

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	نقطة نهاية صغرى	↗		↗

$f'(x) \geq 0$ في المجال $x > -2$ ، $f'(x) < 0$ في المجال $x < -2$
لذلك
الدالّة $f(x)$ تنازليّة في المجال $x < -2$ ، الدالّة $f(x)$ تصاعديّة في المجال $x > -2$

(2) الإحداثيّ x للنقطة القصوى للدالّة $f(x)$ هو: $x = -2$ هذه هي نقطة نهاية صغرى،
لأنّ الدالّة تنازليّة في المجال $x < -2$
وتصاعديّة في المجال $x > -2$

/ يتبع في صفحة 13 /

تكملة إجابة السؤال 7.

(3) إحداثيّات النقطة القصوى هي: $(-2\,,-10)$

الدالّة $f(x)$ هي دالّة أصليّة لِـ $f'(x)$
لذلك يتحقّق: $f(x)=\int(4x^3-12x+8)\,dx$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=x^4-6x^2+8x+C$$

الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يمرّ عبر
نقطة النهاية الصغرى $(-2\,,-10)$
لذلك يتحقّق: $-10=(-2)^4-6(-2)^2+8(-2)+C$

$$\Downarrow$$

$$C=14$$

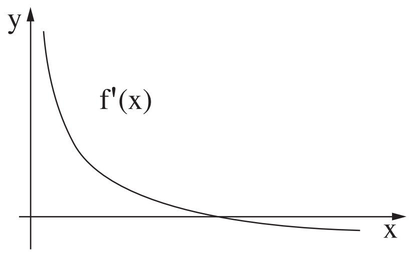
الدالّة $f(x)$ هي: $f(x)=x^4-6x^2+8x+14$

ب. ميل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو 0 بالنسبة للنقاط التي تساوي فيها دالّة المشتقّة $f'(x)$ صفرًا.
النقطتان هما: $(-2\,,-10)$, $(1\,,17)$

/يتبع في صفحة 14/

السؤال 7

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 1$ ، $x > 0$.



أ. جد الإحداثيّ x لنقطة تقاطُع $f'(x)$ مع المحور x .

ب. جد الإحداثيّ x للنقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ ، وحدِّد نوع هذه النقطة القصوى. علّل.

جـ. معلوم أنّ الإحداثيّ y للنقطة القصوى الداخليّة لِـ $f(x)$ هو 0 . جد $f(x)$.

د. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ، والمستقيم $x = 4$ والمستقيم $x = 25$ والمحور x .

إجابة السؤال 7

أ. $$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{\sqrt{x}} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = 4$$
$$\Downarrow$$
$$x = 16$$

ب. وجدنا أنّ $f'(16) = 0$ وحسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ ينتج:

x	$0 < x < 16$	16	$x > 16$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$\Downarrow$$

لِـ $f(x)$ نهاية عظمى في $x = 16$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 7.

جـ. f(x) هي دالّة أصليّة لِـ f'(x) ، لذلك: $f(x)=\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx=2\cdot4\sqrt{x}-x+C$

إحداثيّات النقطة القصوى لِـ f(x) هي: $(16\,,0)$

نعوّض النقطة (16 , 0) في معادلة f(x) ، وينتج:

$$2\cdot4\sqrt{16}-16+C=0$$
$$\Downarrow$$
$$C=-16$$

من هنا الدالّة f(x) هي: $f(x)=8\sqrt{x}-x-16$

د. المساحة المطلوبة مكوَّنة من مساحتين:
إحداهما فوق المحور x والأخرى تحت المحور x ،
لذلك المساحة المطلوبة هي:

$$S=\int_4^{16}f'(x)\,dx-\int_{16}^{25}f'(x)\,dx=\left[f(16)-f(4)\right]-\left[f(25)-f(16)\right]$$
$$\Downarrow$$
$$S=(0+4)-(-1-0)=5$$

/يتبع في صفحة 15/

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٥ - سؤال ٧

7. معطاة الدالّة $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة. $x>0$

(2) هل يقطع الرسم البيانيّ للدالّة المحورين؟ علّل.

(3) حسب البندين الفرعيّين السابقين، ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة، إذا كان معطى أنّ الدالّة تنازليّة في كلّ مجال تعريفها.

ب. (1) أضف المستقيم $y = 3x + 2$ والمستقيم $x = 4$ إلى الرسم البيانيّ التقريبيّ الذي رسمتَه.

(2) احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمستقيمين اللذين أضفتَهما والمحور x والمحور y.

أ2.

تقاطع الداله مع محور y

لا يوجد لان $x=0$ ليس بالمجال.

تقاطع الداله مع محور x

$0 = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \quad \backslash -2$

$-2 = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \backslash \cdot\sqrt{x}$

$-2\sqrt{x} = 3$

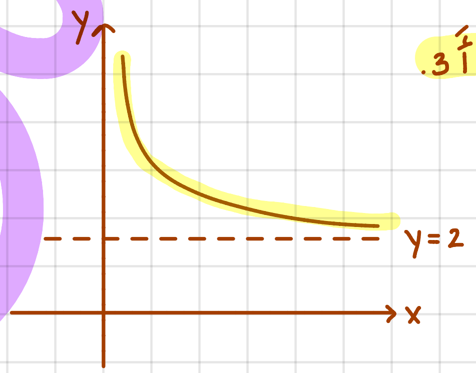
$\sqrt{x} = -1.5$

$\emptyset$

لا يوجد

أ3.

نعتمد على: نقاط التقاطع مع المحورين, المعطى ان الدالة تنازلية بكل مجالها وعلى خطوط التقارب للدالة

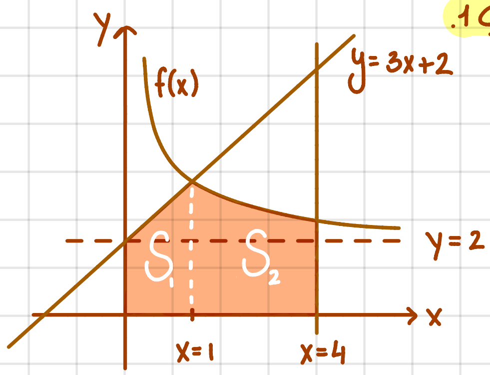


خط تقارب عامودي : $x=0$

خط تقارب افقي : $y=2$

$$\left(y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+2\right) \to \frac{3}{\infty}+2 = 0+2 = 2\right) \to y=2$$

ب1.



* نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور y هو $(0,2)$ $\longrightarrow$ $y = 3\cdot0+2 = 2$

* نجد الاحداثي x لنقطة تقاطع f(x) مع المستقيم :

$3x+2 = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \quad \backslash -2$

$3x = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad |^2$

$9x^2 = \frac{9}{x} \quad \to \quad 9x^3 = 9 \quad \backslash :9$

$x^3 = 1$

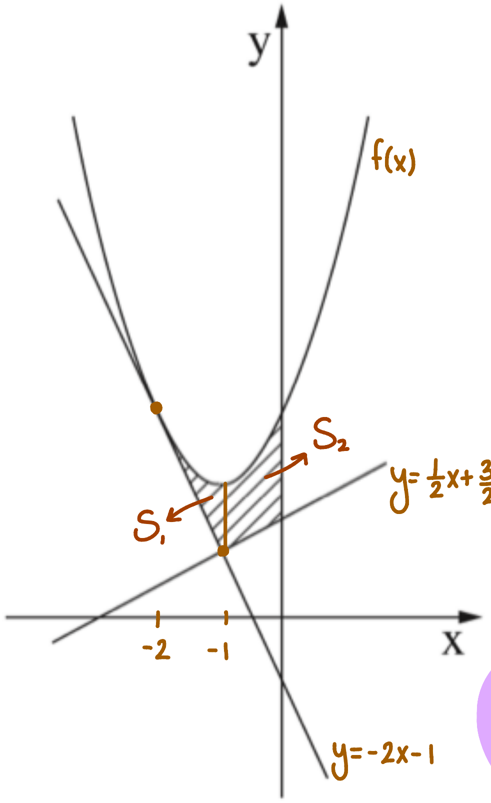
$x = 1$

$$S_1 = \int_0^1 (3x+2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{3\cdot1^2}{2}+2\cdot1\right) - \left(\frac{3\cdot0^2}{2}+2\cdot0\right) = 3.5$$

ب2.

$$S_2 = \int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}}+2\right)dx = \left(3\cdot2\cdot\sqrt{x}\cdot1 + 2x\right)\Big|_1^4 = \left(6\sqrt{x}+2x\right)\Big|_1^4 = \left(6\cdot\sqrt{4}+2\cdot4\right) - \left(6\cdot\sqrt{1}+2\cdot1\right) = 20-8 = 12$$

$$S = S_1 + S_2 = 3.5 + 12 = 15.5$$ وحدة مساحة



$f'(x)=2x+a$

.7 معطاة الدالّة $f(x)=x^2+ax+b$. a وَ b هما بارامتران.

المستقيم $y=-2x-1$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة

في النقطة التي فيها $x=-2$ (انظر الرسم).

أ. جد قيمة a وقيمة b .

عوِّض: $a=2$ وَ $b=3$ ، وأجب عن البند "ب". ← $f(x)=x^2+2x+3$

ب. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة f(x)

والمماسّ والمستقيم $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ والمحور y

(المساحة المخطّطة في الرسم).

أ. * المستقيم يمس الرسم البياني للدالة في النقطة $x=-2$

⇐ مشتقة الدالة عندما $x=-2$ يساوي ميل المستقيم $m=-2$

$(-2=f'(x=-2))$

⇐ $-2=2\cdot(-2)+a$

$-2=-4+a$

$a=2$ ← $f(x)=x^2+2x+b$

* الدالة $f(x)$ تتقاطع مع المستقيم عندما $x=-2$ $(f(x=-2)=y_{x=-2})$

$(-2)^2+2\cdot(-2)+b=-2\cdot(-2)-1$

$b=3$

ب. نجد احداثي x تقاطع المستقيمان: $\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=0.5x+1.5 \end{cases}$ ← $-2x-1=0.5x+1.5$

$-2.5=2.5x$

$x=-1$

المخطط $S=S_1+S_2$

$$S_1=\int_{-2}^{-1}(f(x)-(y=-2x-1))dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+2x+3-(-2x-1))dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)\right)$$

$$=-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} \left(f(x) - (y = 0.5x+1.5)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2+2x+3-(0.5x+1.5)\right) dx = \int_{-1}^{0} (x^2+1.5x+1.5)\, dx$$

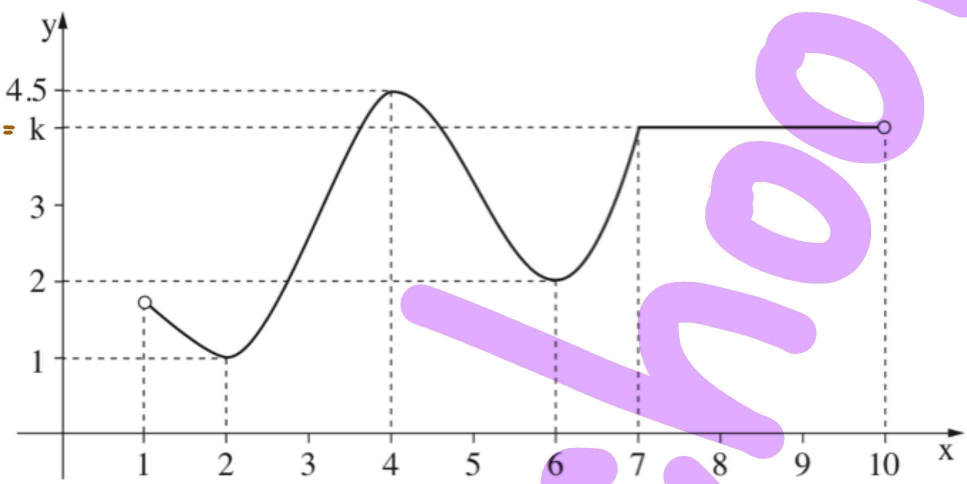
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 1.5\cdot\frac{x^2}{2} + 1.5x\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \left(\frac{0^3}{3} + 1.5\cdot\frac{0^2}{2} + 1.5\cdot 0\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 1.5\cdot\frac{(-1)^2}{2} + 1.5\cdot(-1)\right)$$

$$= 0 - -\frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$

ดังนั้น $S = \frac{1}{3} + \frac{13}{12} = 1\frac{5}{12} = 1.4167$ ตารางหน่วย

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٨

8. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال $1 < x < 10$.



* تذكير!

$f(x)$ تصاعدي = $f'(x)$ موجب

$f(x)$ تنازلي = $f'(x)$ سالب

نقطة حرجه = $f'(x)=0$

اعتمد على الرسم البيانيّ لـ $f(x)$ وعلى القيَم المسجّلة على المحورين، وأجب عن البنود "أ"، "ب"، "جـ"، "د" .

أ. جد بالنسبة لأيّة قيَم x لا تساوي 7 ، يتحقّق:

(1) $f'(x) < 0$. علّل. مشتقة سالبه = الدالة تنازلية ← $6 > x > 4$ أو $2 > x > 1$

(2) $f'(x) > 0$. علّل. مشتقة موجبه = الدالة تصاعدية ← $7 > x > 6$ أو $4 > x > 2$

(3) $f'(x) = 0$. علّل. مشتقة صفر ← $x = 2,4,6$ أو $10 > x > 7$

ب. معطى أنّ: $\int_7^9 k\,dx = 8$ ، k هو البارامتر المشار إليه على المحور y في الرسم.

جد قيمة الدالّة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = 9$.

جـ. ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $2 \le x \le 6$.

د. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x، في المجال $2 \le x \le 4$ (قيمة عدديّة).

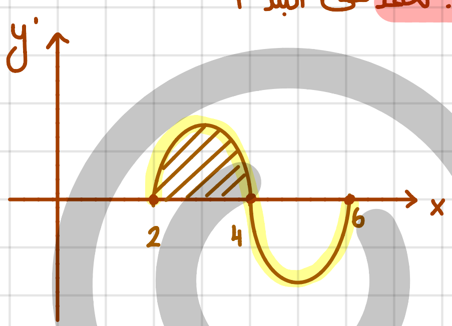
ب. معطى:

$$\int_7^9 k\,dx = (kx)\Big|_7^9 = 9k - 7k = 2k = 8$$

$k = 4$

→ $f(x=9) = k = 4$

ج. نعتمد على البند أ



د.

$$S = \int_2^4 f'(x)dx = (f(x))\Big|_2^4 = f(4) - f(2) = 4.5 - 1 = 3.5$$ وحدة مساحة

6. معطاة الدالّة $f(x)=8(2x-1)^3$ المعرَّفة لكلّ x .

أ. (1) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(2) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

ب. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ هو خطّ مستقيم.

هذا المستقيم يمرّ عبر نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(1) جد معادلة المستقيم.

(2) جد قيمة $g(\frac{1}{4})$ وقيمة $f(\frac{1}{4})$.

(3) جد المساحة في الربع الرابع، المحصورة بين المستقيم والرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

أ1. تقاطع مع محور x :

$0=8(2x-1)^3$

$x=0.5$

$(0.5,0)$

تقاطع مع محور y :

$f(0)=8\cdot(2\cdot0-1)^3=-8$

$(0,-8)$

أ2. نجد النقاط الحرجة للدالة :

$f'(x)=8\cdot3\cdot(2x-1)^2\cdot2$

$f'(x)=48\cdot(2x-1)^2=0$

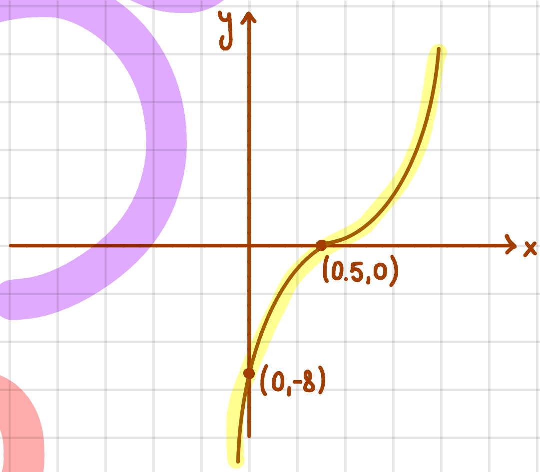
$x=0.5$

نفحص حول النقطة بجدول بحث

	$x<0.5$ $(x=0)$	$x=0.5$	$x>0.5$ $(x=1)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	التواء تصاعدي	↗

الدالة دائمًا تصاعدية (المشتقة دائمًا موجبة)

ب. $\Longrightarrow$



جـ1. $g(x)$ خط مستقيم يمر عبر $(0.5,0)$ $(0,-8)$

ميل الخط المستقيم : $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0--8}{0.5-0}=16$

معادلة الخط المستقيم : $y=mx+n$

$m=16$ $(0,-8)$ $\leftarrow$ $-8=16\cdot0+n$

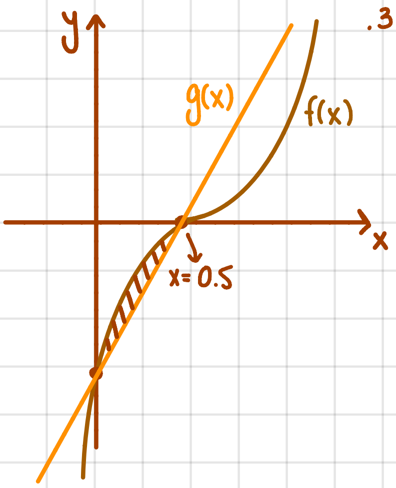
$n=-8$

$g(x)=16x-8$

جـ2. $f(\frac{1}{4})=8\cdot(2\cdot\frac{1}{4}-1)^3=-1$

$g(\frac{1}{4})=16\cdot\frac{1}{4}-8=-4$

جـ3.



S المخطط $=\int_0^{0.5}(f(x)-g(x))dx=\int_0^{0.5}(8\cdot(2x-1)^3-(16x-8))dx$

$=\int_0^{0.5}(8\cdot(2x-1)^3-16x+8)dx=\left(8\cdot\frac{(2x-1)^4}{4\cdot2}-16\cdot\frac{x^2}{2}+8x\right)\Big|_0^{0.5}$

$=\left((2x-1)^4-8x^2+8x\right)\Big|_0^{0.5}$

$=((2\cdot0.5-1)^4-8\cdot0.5^2+8\cdot0.5)-((2\cdot0-1)^4-8\cdot0^2+8\cdot0)=2-1=1$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٦ - سؤال ٧

7. معطاة الدالّتان: $f(x) = -x^2 + 16$

$g(x) = -x^2 - ax$ ، a هو بارامتر.

أ. (1) معطى مستقيم يوازي المحور x ويمسّ الرسم البيانيّ للدالّة f(x) .

ميله 0

جد معادلة هذا المستقيم.

(2) المستقيم، الذي وجدتَ معادلته، يمسّ أيضًا الرسم البيانيّ للدالّة g(x)

$g'(x=4)=0$

في النقطة التي فيها $x = -4$.

جد قيمة a .

عوِّض $a = 8$ ، وأجب عن البندين "ب" وَ "جـ". ← $g(x)=-x^2-8x$

ب. (1) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة f(x)
والرسم البيانيّ للدالّة g(x) مع المحورين.

(2) ارسم في نفس هيئة المحاور رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة f(x)
ورسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة g(x) .

جـ. الرسم البيانيّ للدالّة f(x) يقطع الجزء السالب من المحور x في النقطة A .
الرسم البيانيّ للدالّة g(x) يقطع الجزء السالب من المحور x في النقطة B .
جد المساحة (في الربع الثاني) المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين
والقطعة AB .

أ1. نجد بأي x ميل المماس للدالة (مشتقة الدالة) هو صفر.

$m=f'(x)=-2x=0$

$x=0$

نجد الاحداثيات النقطة:

$f(x=0) = -0^2+16=16 \to (0,16)$

لدينا ميل ونقطة نجد معادلة المماس:

$y=mx+n \quad m=0 \quad (0,16)$

$16=0\cdot 0+n$

$n=16 \longrightarrow y=16$

أ2. المستقيم $y=16$ والدالة g(x) لهم نفس الميل (صفر) عندما $x=4$.

$g'(x)=-2x-a$

$g'(x=4)=-2\cdot 4-a=0=y'$

$a=8$

ب1.

f(x)

تقاطع مع x

$-x^2+16=0$

$x^2=16$

$x=4,-4$

(4,0) (-4,0)

تقاطع مع y

$f(0)=-0^2+16=16$

(0,16)

g(x)

تقاطع مع x

$-x^2-8x=0$

$-x(x+8)=0$

$x=0 \quad x=-8$

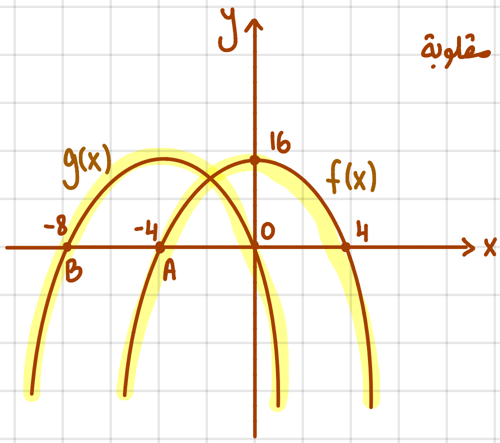
(0,0) (-8,0)

تقاطع مع y

$g(0)=-0^2-8\cdot 0=0$

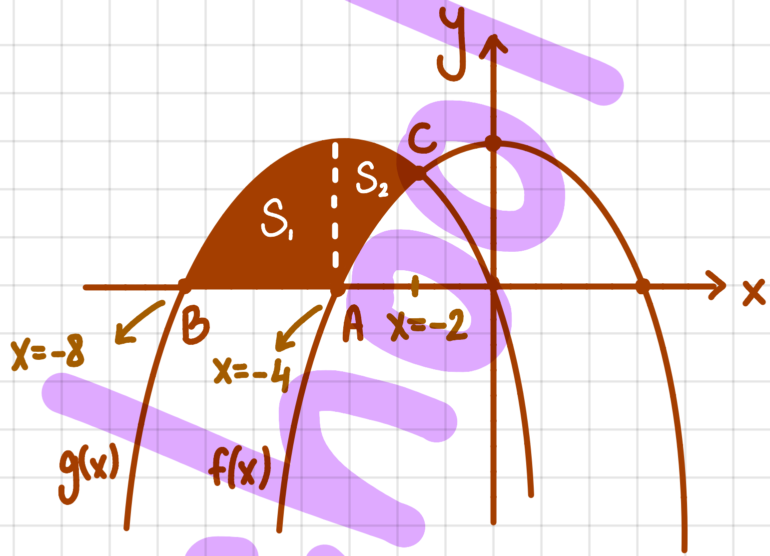
(0,0)

ب2. الدالتين دوال تربيعية مقلوبة حسب بند ب:



ج. نعيّن C نقطة التقاء الرسمين البيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$، نجد احداثي x للنقطة : $-x^2-8x=-x^2+16$

$x=-2$



$$S_1=\int_{-8}^{-4} g(x)\,dx=\int_{-8}^{-4}(-x^2-8x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-8}^{-4}=\left(-\frac{x^3}{3}-4x^2\right)\Big|_{-8}^{-4}=\left(-\frac{(-4)^3}{3}-4\cdot(-4)^2\right)-\left(-\frac{(-8)^3}{3}-4\cdot(-8)^2\right)$$

$$=-\frac{128}{3}--\frac{256}{3}=\frac{128}{3}$$

$$S_2=\int_{-4}^{-2}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-4}^{-2}(-x^2-8x-(-x^2+16))\,dx=\int_{-4}^{-2}(-8x-16)\,dx=\left(-8\cdot\frac{x^2}{2}-16x\right)\Big|_{-4}^{-2}=(-4x^2-16x)\Big|_{-4}^{-2}$$

$$=(-4\cdot(-2)^2-16\cdot(-2))-(-4\cdot(-4)^2-16\cdot(-4))=16-0=16$$

$\Rightarrow$ S المطلوب $=S_1+S_2=\frac{128}{3}+16=\frac{176}{3}=58\frac{2}{3}=58.667$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ - سؤال ٧

7. مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

أ. (1) جد الإحداثيّات x للنقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط .

(2) المستقيم $y = 4$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة النهاية العظمى للدالّة .
$x=1$

جد الدالّة $f(x)$.

ب. (1) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين .

(2) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. عبر نقطة النهاية الصغرى للدالّة $f(x)$ مرّروا عمودًا على المحور x .

جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمماسّ $y = 4$ والمحور y والعمود.

أ1. نجد النقاط القصوى: $f'(x)=3x^2-12x+9=0 \quad |:3$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=1,3$

نرتّب بجدول بحث، لتحديد نوع هذه النقاط:

	$x<1$ $(x=0)$	$x=1$	$3>x>1$ $(x=2)$	$x=3$	$x>3$ $(x=4)$
$f'(x)$	9	0	-3	0	9
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

أ2. نقطة التماس حسب المعطى هو $(1,4)$. نجد الدالة الاصلية:

$$F(x)=\int f'(x)dx = \int(3x^2-12x+9)dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}-12\cdot\frac{x^2}{2}+9x+c = x^3-6x^2+9x+c$$

نعوّض النقطة:

$4=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1+c$

$4=4+c$

$c=0$

$\Leftarrow \quad F(x)=x^3-6x^2+9x$

ب1. تقاطع مع محور y: $f(x=0)=0^3-6\cdot0^2+9\cdot0=0$

$(0,0)$

تقاطع مع محور x:

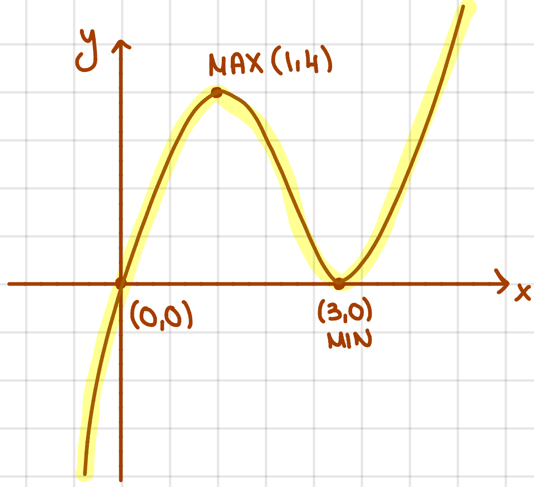
$x^3-6x^2+9x=0$

$x(x^2-6x+9)=0$

$x(x-3)^2=0$

$x=0,3 \qquad (0,0) \quad (3,0)$

ب2.



* نرسم الدالة اعتمادًا على النقاط القصوى

MAX(1,4) MIN(3,0)

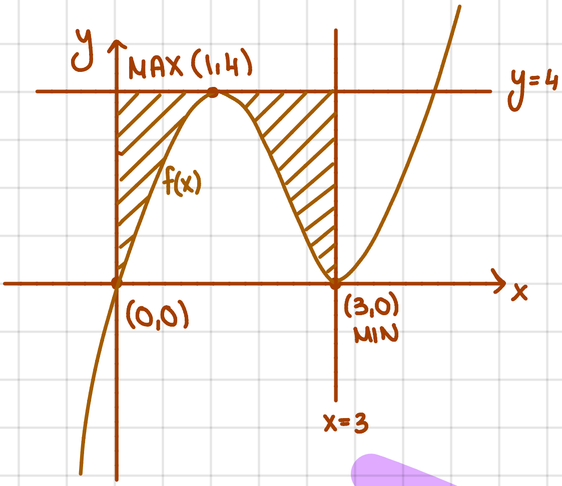
وجدول البحث ونقاط تقاطع الدالة

مع المحورين .

$f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=4$

ج.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$



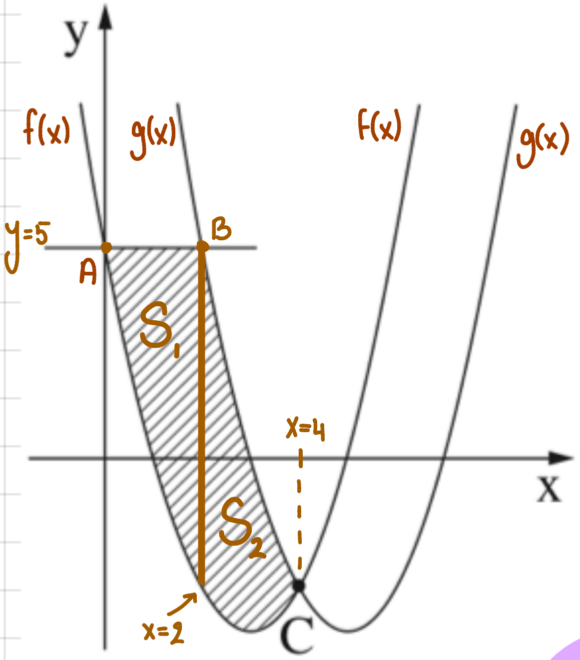
$$\text{مخطط } S = \int_0^3 \big(y=4 - f(x)\big)dx = \int_0^3 \big(4-(x^3-6x^2+9x)\big)\,dx = \int_0^3 (-x^3+6x^2-9x+4)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + 6\cdot\frac{x^3}{3} - 9\cdot\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_0^3 = \left(-0.25x^4 + 2x^3 - 4.5x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \left(-0.25\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 - 4.5\cdot 3^2 + 4\cdot 3\right) - \left(-0.25\cdot 0^4 + 2\cdot 0^3 - 4.5\cdot 0^2 + 4\cdot 0\right)$$

$$= \frac{21}{4} - 0 = \frac{21}{4} = 5.25 \text{ وحدة مساحة}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ موعد ب - سؤال ٨



.8 الرسم الذي أمامك يصف الرسمين البيانيّين للدالّتين:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$g(x) = x^2 - 10x + a$

a هو بارامتر.

الرسمان البيانيّان يتقاطعان في النقطة C (انظر الرسم).

الإحداثيّ x للنقطة C يساوي 4 .

أ. جد قيمة a .

ب. عبر نقطة تقاطع أحد الرسمين البيانيّين مع المحور y مرّروا مستقيمًا يوازي المحور x ، كما هو موصوف في الرسم. جد المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين والمستقيم الموازي للمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).

أ. الدالتان f(x) و g(x) يتقاطعا عندما x=4 :

$f(x=4) = 4^2 - 6\cdot4 + 5 = -3$

$g(x=4) = 4^2 - 10\cdot4 + a = -24 + a$

$\leftarrow$ $-3 = -24 + a$

$a = 21$

ب. نجد الاحداثيات النقطة A ، هي نقطة تقاطع احدى الدالتين مع محور y :

$f(0) = 0^2 - 6\cdot0 + 5 = 5$

$g(0) = 0^2 - 10\cdot0 + 21 = 21$

$\leftarrow$ $A(0,5)$

نجد الاحداثيات النقطة B ، AB يوازي محور x لذلك ل A و B نفس الاحداثي y=5 ، B يقع على g(x) :

$g(x) = x^2 - 10x + 21 = 5$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x-2)(x-8) = 0 \longrightarrow B(2,5)$

$S_{\text{المخطط}} = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_0^2 (y - f(x))dx = \int_0^2 (5 - (x^2 - 6x + 5))dx = \int_0^2 (-x^2 + 6x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 3\cdot2^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 3\cdot0^2\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3} = 9.333$$

$$S_2 = \int_2^4 (g(x) - f(x))dx = \int_2^4 (x^2 - 10x + 21 - (x^2 - 6x + 5))dx = \int_2^4 (-4x + 16)dx = \left(-4\cdot\frac{x^2}{2} + 16x\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(-2x^2 + 16x\right)\Big|_2^4 = (-2\cdot4^2 + 16\cdot4) - (-2\cdot2^2 + 16\cdot2) = 8$$

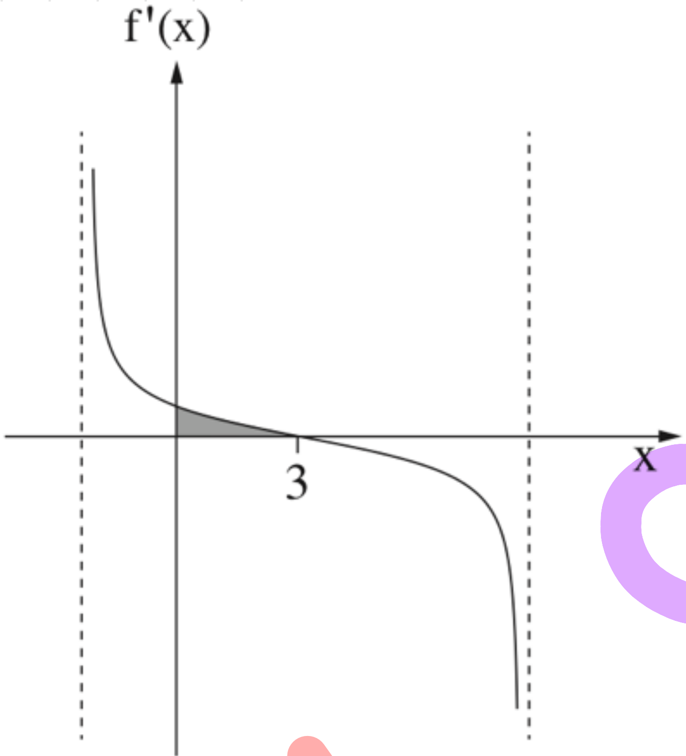
$\Rightarrow S_{\text{المخطط}} = 9\frac{1}{3} + 8 = 17\frac{1}{3} = 17.333$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٧ - سؤال ٧

7. الرسم الذي أمامك يصف الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$

للدالّة $f(x)=\sqrt{-x^2+bx+16}$. b هو بارامتر.

أجب عن البنود التي أمامك (بإمكانك الاستعانة بالرسم البيانيّ للمشتقّة إذا دعت الحاجة):



أ. (1) ما هو الإحداثيّ x للنقطة القصوى الداخليّة لـ $f(x)$ ؟ علّل.

(2) جِد b .

ب. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

جـ. جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

د. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

هـ. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للمشتقّة $f'(x)$ والمحور y والمحور x (المساحة الرماديّة).

أ. (1) حسب الرسم البياني للمشتقة للدالة تتواجد نقطة قصوى داخليه عندما $x=3$ لان $f'(x=3)=0$.

(2) نشتق الدالة: $\boxed{f'(x)=\frac{-2x+b}{2\sqrt{-x^2+bx+16}}}$ ← نعوض المعطى من البند السابق: $\frac{-2\cdot3+b}{2\sqrt{-3^2+3b+16}}=0 \Big/ \cdot 2\sqrt{-3^2+3b+16}$

$-6+b=0$

$b=6$

ب. $\boxed{f(x)=\sqrt{-x^2+6x+16}}$

مجال التعريف: $-x^2+6x+16\geq0$

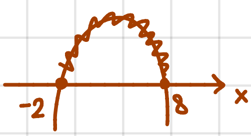
$\cap \quad a<0$

$-x^2+6x+16=0 \,/\cdot -1$

$x^2-6x-16=0$

$(x-8)(x+2)=0$

$x=-2,8$



ص.ت: $8\geq x\geq-2$

ج. نعوض $b=6$ بمعادلة مشتقة الدالة ونجد النقاط القصوى:

$f'(x)=\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x+16}}=0 \Big/ \cdot 2\sqrt{-x^2+6x+16}$

$-2x+6=0$

$2x=6$

$x=3$

نرتّب بجدول نقاط القصوى ومجال التعريف (نقاط الأطراف):

	$x<-2$	$x=-2$	$3>x>-2$	$x=3$	$8>x>3$	$x=8$	$x>8$
f'			+	0	−		
f		MIN $(-2,0)$	↗	MAX $(3,5)$	↘	MIN $(8,0)$	

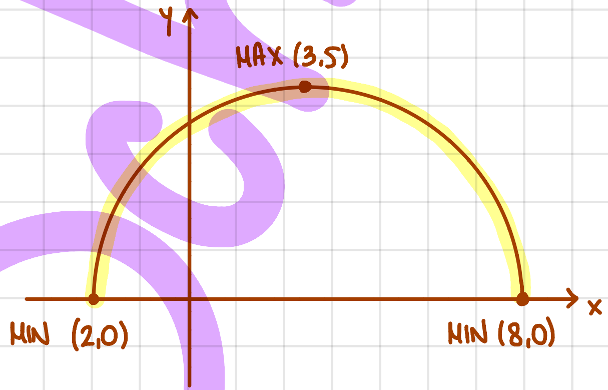
← حسب الرسم البياني المعطى

$f(-2)=\sqrt{-(-2)^2+6\cdot(-2)+16}=0$

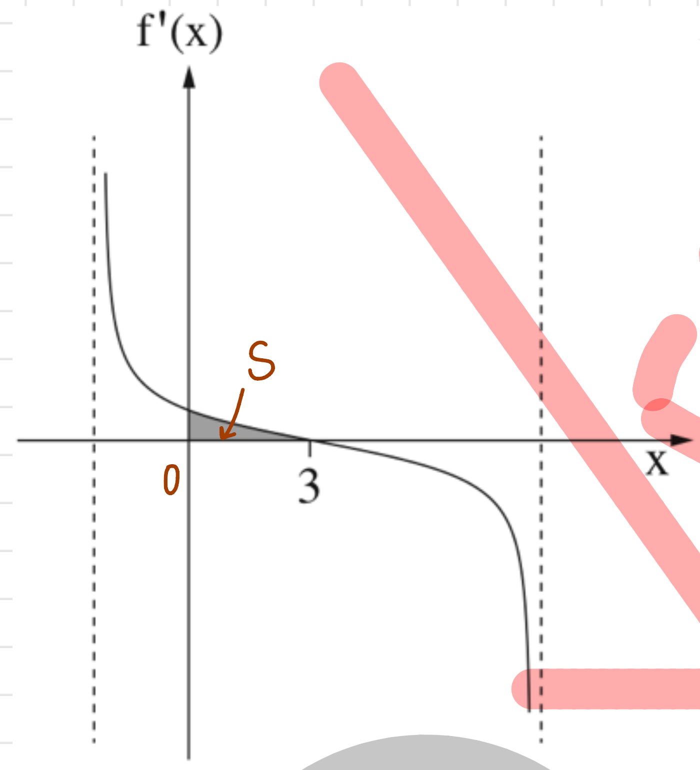
$f(3)=\sqrt{-3^2+6\cdot 3+16}=5$

$f(8)=\sqrt{-8^2+6\cdot 8+16}=0$

د.



هـ.



$$S=\int_0^3 f'(x)\,dx=\left(F(x)\right)\Big|_0^3$$

$$=\left(\sqrt{-x^2+6x+16}\right)\Big|_0^3$$

$$=\sqrt{-3^2+6\cdot 3+16}-\sqrt{-0^2+6\cdot 0+16}$$

$$=5-4$$

$=1$ وحدة مساحة

7. معطاة الدالّة $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+16}}$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(3) جد خطّ التقارب العموديّ للدالّة $f(x)$.

(4) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

(5) ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة $f(x)$ في المجال $x \le 0$.

معطاة الدالّة $g(x) = f(x) - 2$.

ب. (1) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

(2) ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة $g(x)$ في المجال $x \le 0$.

جـ. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ والمحورين.

أ. (1) $x+16 \ge 0$ وأيضًا $x+16 \neq 0$

$x \ge -16$ وأيضًا $x \neq -16$

$x > -16$

(2) تقاطع الدالة مع محور y

$f(0) = \frac{4}{\sqrt{0+16}} = 1 \rightarrow (0,1)$

تقاطع الدالة مع محور x

$\frac{4}{\sqrt{x+16}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{x+16}$

$4 = 0$

$\emptyset$ لا يوجد تقاطع مع محور x

(3) المقام = 0

$\sqrt{x+16} = 0$

$x = -16$

(4) $f'(x) = \frac{0 \cdot \sqrt{x+16} - \frac{1}{2\sqrt{x+16}} \cdot 4}{x+16} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\left(\frac{-2}{\sqrt{x+16}}\right)}{x+16}} = 0 \quad / \cdot x+16$

$\frac{-2}{\sqrt{x+16}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{x+16}$

$-2 = 0$

$\emptyset$ لا يتواجد نقاط حرجة/قصوى

جدول بحث حسب مجال التعريف : (x=0)

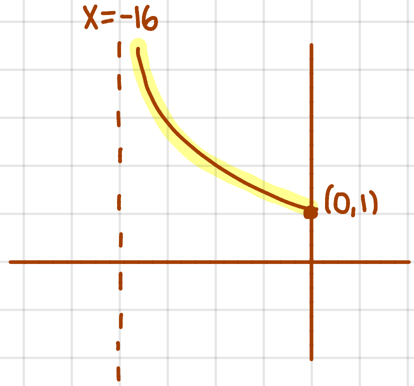
$f'(0) = \frac{\left(\frac{-2}{4}\right)}{16} < 0$

$x<-16$	$x=-16$	$x>-16$
//////	//////	−
//////	//////	↘

مجال تنازلي $x>-16$

مجال تصاعدي $\emptyset$

(5)



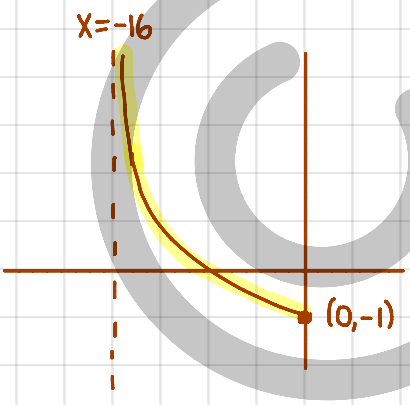
ب. (1) $g(x) = f(x) - 2$

تدل على ازاحة عامودية وحدتين إلى الاسفل للدالة $f(x)$.

هذه الإزاحة تؤدي الى تغيير الاحداثي y لكل النقاط على الرسم البياني للدالة $f(x)$.

الاحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور y هو $(0,1)$ $\Leftarrow$ لـ $g(x)$ هو $(0,1-2)$ اي $(0,-1)$

ب. (2)



ج.

$$g(x) = f(x) - 2 = \frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2$$

* المساحة S محصورة بين $g(x)$ ، محور x ومحور y.

* نجد المداخي x لنقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $g(x)$ مع محور x.

$$0 = \frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2$$

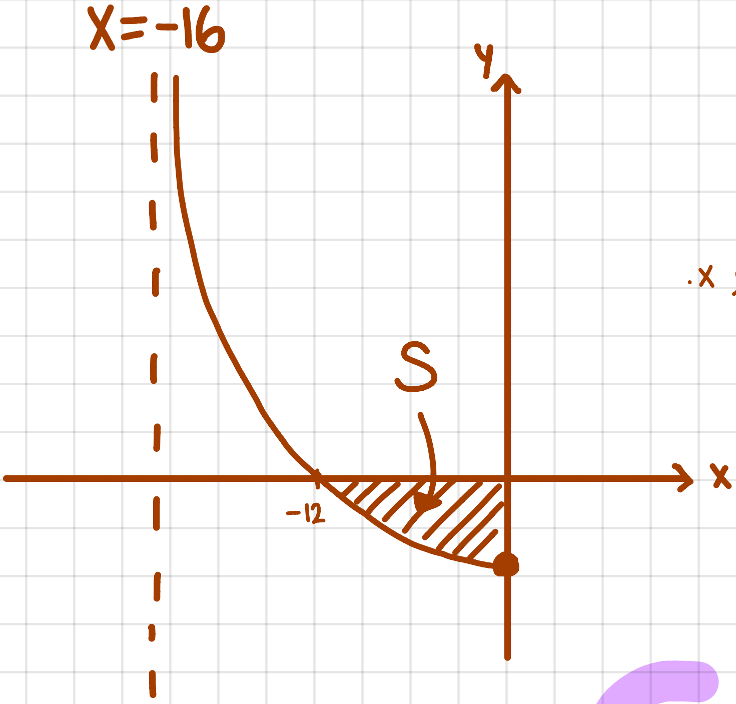
$$2 = \frac{4}{\sqrt{x+16}} \quad \Big|^2$$

$$4 = \frac{16}{x+16} \quad \Big| \cdot x+16$$

$$4x+64 = 16$$

$$4x = -48$$

$$x = -12$$



$$S = \int_{-12}^{0} \left(\overset{\text{محور } x}{0} - g(x)\right)dx = \int_{-12}^{0} -\left(\frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2\right)dx = \int_{-12}^{0} \left(\frac{-4}{\sqrt{x+16}} + 2\right)dx = \left(-4\cdot 2\cdot\sqrt{x+16} + 2x\right)\Big|_{-12}^{0}$$

$$= \left(-4\cdot 2\cdot\sqrt{16} + 0\right) - \left(-4\cdot 2\cdot\sqrt{-12+16} + 2\cdot(-12)\right)$$

$$= -32 - (-40)$$

$= 8$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ موعد ب - سؤال ٧

.7 معطاة الدالّة $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

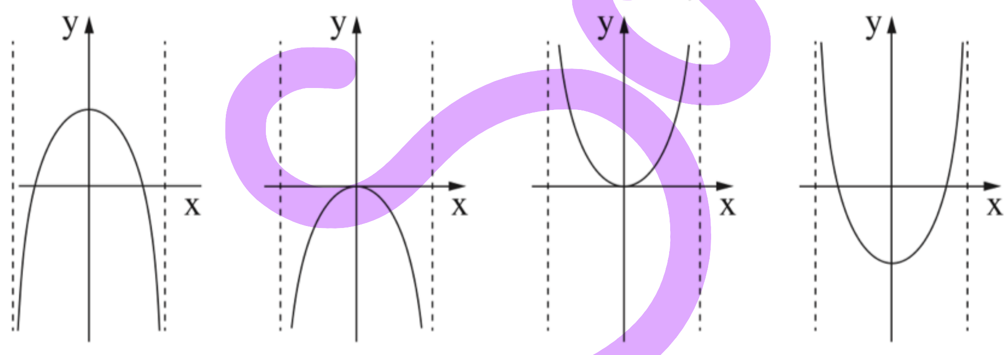
ب. (1) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(2) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

جـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

د. أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة المعطاة في نهاية السؤال (IV-I) هو الرسم البيانيّ للدالّة $f'(x)$ ؟ علّل.

هـ. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f'(x)$ والمحور x والمحور y والمستقيم $x = 1$.



أ. التعبير تحت الجذر ≥ 0

$\underbrace{4-x^2}\geq 0$

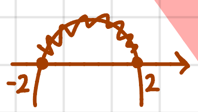
$\cap$ $a<0$

$4-x^2=0$

$x^2=4$

$x=2,-2$

$\Rightarrow$



م.ت : $2 \geq x \geq -2$

ب.1 تقاطع مع x

$0 = x\sqrt{4-x^2}$

$x=0,2,-2$

$(0,0)$ $(2,0)$ $(-2,0)$

تقاطع مع y

$f(0) = 0\sqrt{4-0} = 0$

$(0,0)$

ب2.

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot x$$

$$\boxed{f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}} = 0 \quad \backslash\cdot\sqrt{4-x^2}$$

$4-x^2-x^2=0$

$2x^2=4$

$x^2=2$

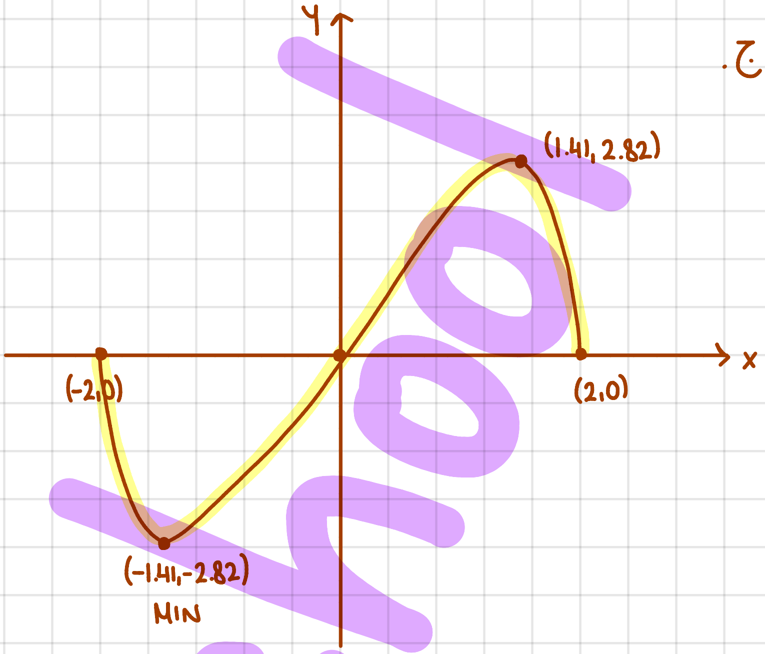
$x=\pm 1.41$

$(1.41, 2.82)$ $(-1.41, -2.82)$

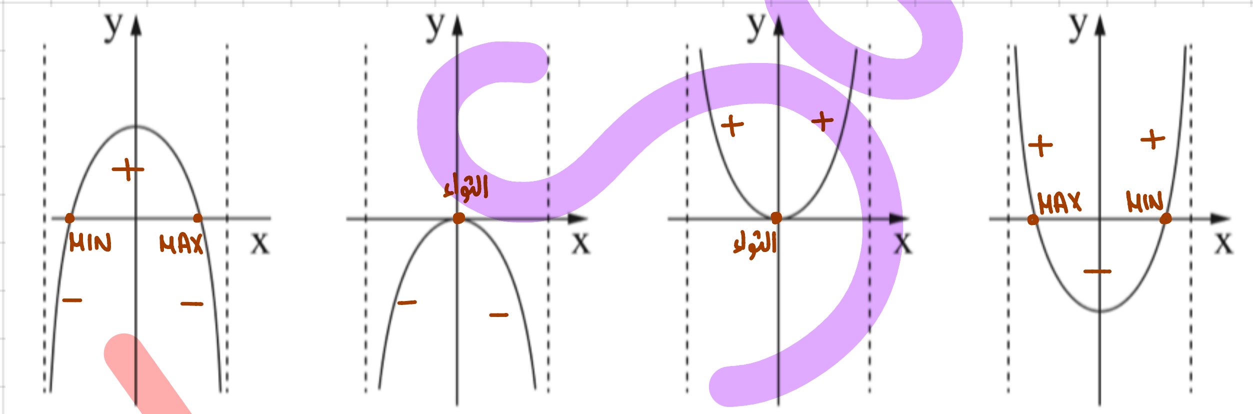
جدول بحث :

	$x<-2$	$x=-2$	$-1.4>x>-2$ $(x=-1.5)$	$x=-1.4$	$-1.4>x>-1.4$ $(x=0)$	$x=1.41$	$2>x>1.41$ $(x=1.5)$	$x=2$	$x>2$
f'			-0.37	0	2	0	-3.3		
f		MAX $(-2,0)$	↘	MIN $(-1.41,-2.8)$	↗	MAX $(1.41,2.8)$	↘	MIN $(2,0)$	

ج.



د.



IV III II I

ننظر الى جدول البحث ونلائم حسب السطر الأوّل (المشتقة)

تعبّر عن نقطة حرجة واحدة !

ه.

المساحة S محصورة بين الرسم البياني للمشتقة $f'(x)$ ، محور x ، محور y و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f'(x)\,dx = \left(f(x)\right)\Big|_0^1 = \left(x\sqrt{4-x^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(1\cdot\sqrt{4-1}\right) - 0$$

$$= \sqrt{3}$$ وحدة مساحة