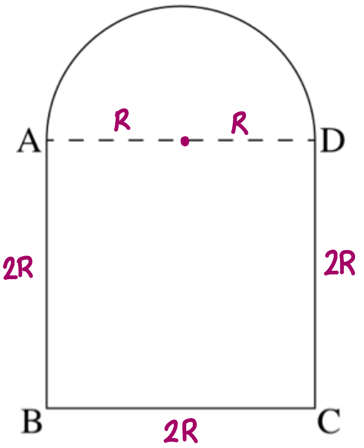
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ١

1. شبّاك مكوّن من نصف دائرة ومن المربّع ABCD .
ضلع المربّع AD هو قطر لنصف الدائرة،
$2R$
كما هو موصوف في الرسم .
مساحة المربّع أكبر بِـ 0.2187 م^2
من مساحة نصف الدائرة .
جد محيط الإطار الخارجيّ للشبّاك .
استعمِل في حساباتك $\pi = 3.14$.



(مساحة دائرة كاملة $\pi \cdot R^2$)

مساحة المربّع = مساحة نصف دائرة

$2R \cdot 2R = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} + 0.2187$

$4R^2 = 1.57R^2 + 0.2187$

$2.43R^2 = 0.2187 \quad \backslash : 2.43$

$R^2 = 0.09 \quad \backslash \sqrt{\ }$

$R = 0.3$

(محيط دائرة كاملة $2\pi R$)

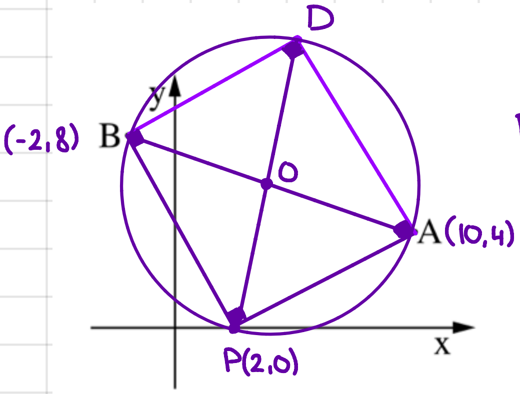
محيط الاطار الخارجي = 3 اضلاع للمربّع + نصف محيط دائرة

$= 3 \cdot 2R + \frac{1}{2} \cdot 2\pi R$

$= 6R + \pi R$

$= 2.742$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٢



2. معطاة النقطتان $A(10,4)$ وَ $B(-2,8)$ (انظر الرسم).

النقطة P موجودة على المحور x بحيث بُعدها عن النقطة A يساوي بُعدها عن النقطة B. $P(x,0)$

أ. جد إحداثيّات النقطة P.

النقاط A وَ B وَ P هي رؤوس للشكل الرباعيّ $ADBP$.

معطى أنّ: $BP \parallel AD$ ، $BD \parallel PA$.

ب. جد إحداثيّات الرأس D.

جـ. جد طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث BDA. علّل.

أ.

$PA = PB$

$P(x,0)$, $A(10,4)$ — $P(x,0)$, $B(-2,8)$

$$\sqrt{(0-4)^2+(x-10)^2} = \sqrt{(0-8)^2+(x--2)^2} \quad /^2$$

$$4^2+(x-10)^2 = (-8)^2+(x+2)^2$$

$$16+x^2-20x+100 = 64+x^2+4x+4$$

$$48 = 24x \quad /:24$$

$$x = 2 \rightarrow P(2,0)$$

ب. معطى انّ $BP \parallel AD$ ، $BD \parallel PA$ $\leftarrow$ $BPAD$ شكل رباعي به كل زوج اضلاع متقابله متوازية اذاً هو متوازي الاضلاع

من بند أ $PA = PB$ $\leftarrow$ $BPAD$ متوازي الاضلاع به ضلعين متجاورين متساويين هو معين.

النقطه O هي نقطة التقاء اقطار المعين, اي هي نقطة وسط AB $\leftarrow$ $O\left(\frac{-2+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right)$ $O(4,6)$

هي ايضاً نقطة وسط PD, نفرض $D(x,y)$. اذاً:

$$\frac{0+y}{2} = 6 \qquad \frac{2+x}{2} = 4$$

$$y = 12 \qquad 2+x = 8$$

$$x = 6 \rightarrow D(6,12)$$

ج. الزاوية D هي قائمة, الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة (BA)

نصف القطر $BO = OA$, نجد احدهما:

$B(-2,8)$, $O(4,6)$

$$R = BO = \sqrt{(-2-4)^2+(8-6)^2} = \sqrt{40}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٣

.3 يُصدِّر أحد المُزارعين زهورًا بيضاء وزهورًا حمراء. في مخزن المُزارع:

$\frac{1}{12}$ من الزهور البيضاء هي جوريّة. ← $\frac{1}{12}\cdot x\%$

$\frac{2}{3}$ الزهور الحمراء هي جوريّة. ← $\frac{2}{3}(100-x)\%$

25% من مجمل الزهور هي جوريّة، والباقي سوسن.

* نفرض نسبة الزهور البيضاء $x\%$
↓
نسبة الزهور الحمراء $(100-x)\%$

أ. نختار عشوائيًا زهرة من بين الزهور التي في المخزن.

(1) ما هو الاحتمال بأن تكون الزهرة حمراء؟

(2) ما هو الاحتمال بأن تكون الزهرة حمراء إذا كان معلومًا أنّها جوريّة؟

ب. معطى أنّ عدد الجوريّات الحمراء في المخزن هو 300 .

ما هو عدد الزهور في المخزن؟

جدول:

	بيضاء A	حمراء $\bar{A}$	مجموع
جورية B	$\frac{1}{12}\cdot x\%$	$\frac{2}{3}(100-x)\%$	25%
سوسن $\bar{B}$			75%
مجموع	$x\%$	$(100-x)\%$	100%

$$25=\frac{2}{3}(100-x)+\frac{1}{12}\cdot x \quad / \cdot 12$$

$$300=8(100-x)+x$$

$$300=800-8x+x$$

$$-500=-7x$$

$$x=71.42\%$$

⇓

	بيضاء A	حمراء $\bar{A}$	مجموع
جورية B	5.95%	19.05%	25%
سوسن $\bar{B}$	65.53%	9.47%	75%
مجموع	71.42%	28.58%	100%

أ. (1) $P(\bar{A})=0.285$

(2) $P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{19.05\%}{25\%}=0.762$

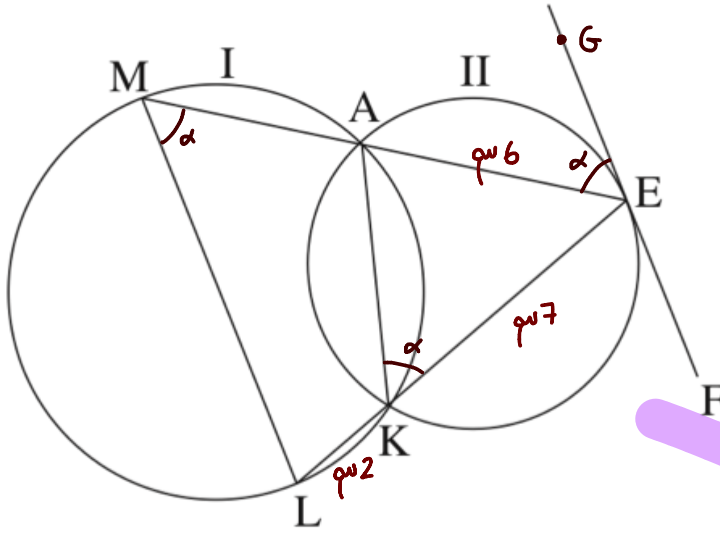
ب. x عدد الزهور في المخزن

$x\cdot 19.05\%$ عدد الجوريات الحمراء في المخزن

$$\frac{19.05}{100}\cdot x=300 \quad / \cdot\frac{100}{19.05}$$

$x=1574.8\approx 1575$ زهور

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٤



4. الشكل الرباعيّ AKLM محصور داخل الدائرة I .
عبر الرأسين A وَ K مرّروا الدائرة II .
امتدادا الضلعين MA وَ LK يلتقيان في النقطة E
التي على محيط الدائرة II.
المستقيم FE يمسّ الدائرة II في النقطة E
(انظر الرسم).

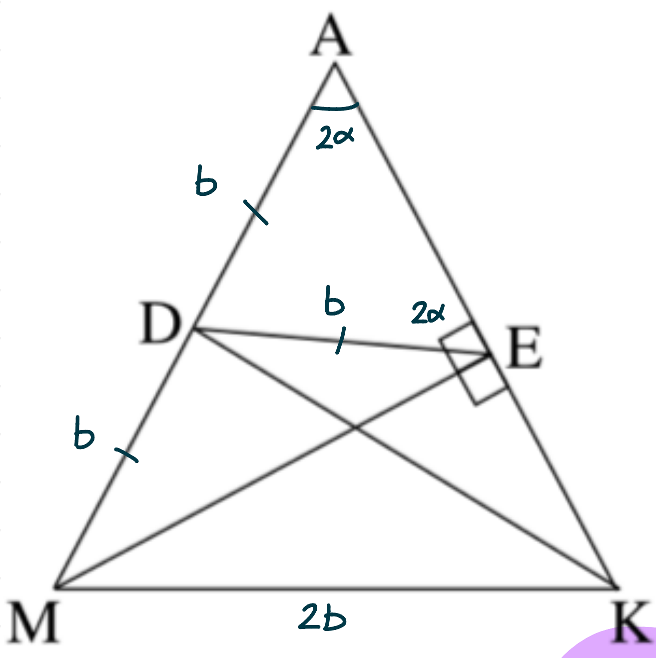
أ. برهن أنّ المستقيم FE يوازي الوتر LM .

ب. برهن أنّ ΔAEK ~ ΔLEM .

جـ. معطى أنّ : AE = 6 سم ، KE = 7 سم ، KL = 2 سم .
(1) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة المثلّث LEM .
(2) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة الشكل الرباعي AKLM .

		إدعاء	شرح
أ.	(1)	$\sphericalangle AEG = \sphericalangle EKA = \alpha$	الزاوية المحصورة بين مماس ووتر يساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر
	(2)	$\sphericalangle AKL = 180 - \alpha^\circ$	المكمّل لـ 180° + ادعاء 1
	(3)	$\sphericalangle AML = \alpha$	AKLM شكل رباعي محصور داخل دائرة اذاً كل زوج زوايا متقابلة مجموعها 180° ← $\sphericalangle AML + \sphericalangle AKL = 180^\circ$
	(4)	$LM \parallel FE$	$\sphericalangle LMA = \sphericalangle GEM = \alpha$ وهو المطلوب
ب.	(5)	$\Delta AEK \sim \Delta LEM$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle MEL = \sphericalangle AEK$ ز. $\sphericalangle LMA = \sphericalangle GEM = \alpha$ وهو المطلوب
ج1.	(6)	$\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	نسب التشابه من ادعاء 5 : $\frac{AK}{LM} = \frac{EK}{EM} = \frac{AE}{LE} = \frac{6}{7+2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ النسبة بين مساحة مثلثين متشابهين هو تربيع النسبة بين اضلاعهم وهو المطلوب
ج2.	(7)	$\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{AKLM}} = \frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta AEK} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$	من ادعاء 6 : $\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta LEM}} = \frac{4}{9} \rightarrow S_{\Delta LEM} = \frac{9}{4} S_{\Delta AEK}$ $S_{AKLM} = S_{\Delta LEM} - S_{\Delta AEK} = \frac{9}{4} S_{\Delta AEK} - S_{\Delta AEK}$ $= S_{\Delta AEK}\left(\frac{9}{4} - 1\right) = S_{\Delta AEK} \cdot \frac{5}{4}$ وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٥



.5 في المثلّث المتساوي الساقين AMK $(AM = AK)$
KD هو مستقيم متوسّط للساق AM ،
وَ ME هو ارتفاع على الساق AK (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ $\sphericalangle DEA = \sphericalangle DAE$.

معطى أنّ: $\sphericalangle MAK = 2\alpha$ ، $AM = 2b$.

ب. عبّر بدلالة b وَ α عن مساحة المثلّث ADE .

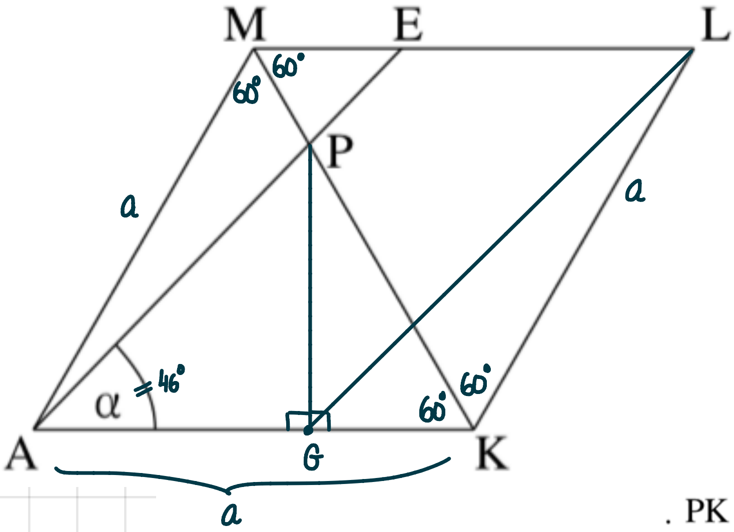
جـ. إذا كان معطى أيضًا أنّ $MK = 2 \cdot DE$:

(1) احسب α .

(2) برهن أنّ $DE \parallel MK$.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$DE = AD = DM$	$\triangle AME$ مثلث قائم، المتوسط للوتر يساوي نصفه $\leftarrow DE = \frac{1}{2}AM$
(2)	$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$	من ادعاء 1 ينتج ان $\triangle ADE$ مثلث متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية. وهو المطلوب
ب. (3)	$\sphericalangle ADE = 180 - 4\alpha$	مجموع زوايا المثلث $\triangle ADE$ هو $180°$
(4)	$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} b^2 \sin 4\alpha$	- نظرية sin لمساحة $\triangle ADE$: $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin(\sphericalangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin(180 - 4\alpha)$ - $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$ وهو المطلوب
جـ.1 (5)	$\triangle MAK$ متساوي الاضلاع	معطى $AM = AK$ + $AM = MK = 2b$ $\leftarrow$ $AM = MK = KA$
(6)	$\alpha = 30°$	زوايا مثلث متساوي الاضلاع هو $60°$ $\Leftarrow$ $2\alpha = 60°$ وهو المطلوب
جـ.2 (7)	$DE \parallel MK$	$\sphericalangle AED = \sphericalangle K = 60°$ زوايا متناظرة متساوية وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٦



6. معطى المعيَّن AMLK .
النقطة E موجودة على الضلع ML .
القطر KM يقطع القطعة AE
في النقطة P (انظر الرسم).
معطى أنّ: $\sphericalangle AML = 120^o$ ، $\sphericalangle EAK = \alpha$ ،
طول ضلع المعيَّن هو a .

א. (1) جد مقدار الزاوية PKA . علّل.
(2) عبّر بدلالة a وَ α عن طول القطعة PK .

ب. عبر النقطة P مرّروا عمودًا على الضلع AK . العمود يقطع AK في النقطة G .
معطى أيضًا أنّ $\alpha = 46^o$.
عبّر بدلالة a عن طول القطعة GL .

أ. 1. AMLK معين ، كل اضلاعه متساويه، كل زوج زوايا متقابله متساويه $120^\circ = \sphericalangle M = \sphericalangle L$
كل زوج زوايا متجاورة مجموعها 180° ، $\sphericalangle A = \sphericalangle L = 60^\circ$
اقطارها تنصّف زوايا الشكل $60^\circ = \sphericalangle AMK = \sphericalangle KML = \sphericalangle MKL = \sphericalangle MKA$

$\Leftarrow$ $\sphericalangle PKA = 60^\circ$

2. ΔAMK مثلث متساوي الاضلاع لان كل زواياه متساوية (مقدارها 60°) $\leftarrow$ $MK = a$

ΔAPK مجموع زوايا المثلث 180° $\leftarrow$ $\sphericalangle AFK = 120^\circ - \alpha$

نظرية sin للمثلث ΔAPK : $\dfrac{PK}{\sin(\sphericalangle PAK)} = \dfrac{AK}{\sin(\sphericalangle APK)}$ $\leftarrow$ $\dfrac{PK}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin(120-\alpha)}$

$\leftarrow$ $PK = \dfrac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(120-\alpha)}$

ب. * $PK = \dfrac{a \cdot \sin 46}{\sin(120-46)} = a \cdot 0.748$

* ΔPGK $\cos(\sphericalangle PKG) = \dfrac{GK}{PK}$ $\leftarrow$ $\cos 60^\circ = \dfrac{GK}{0.748 a}$ $\leftarrow$ $GK = \cos 60^\circ \cdot 0.748 \cdot a$
$GK = 0.374 a$

* نظرية cos للمثلث ΔGKL : $GL^2 = GK^2 + KL^2 - 2 \cdot GK \cdot KL \cdot \cos(\sphericalangle K)$
$= (0.374 \cdot a)^2 + a^2 - 2 \cdot (0.374 a) \cdot a \cdot \underbrace{\cos 120^\circ}_{-0.5}$
$= 0.139 a^2 + a^2 + 0.374 a^2$
$GL^2 = 1.513 a^2 \quad / \sqrt{\ }$
$GL = 1.23 a$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٧

7. معطاة الدالّة $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$.

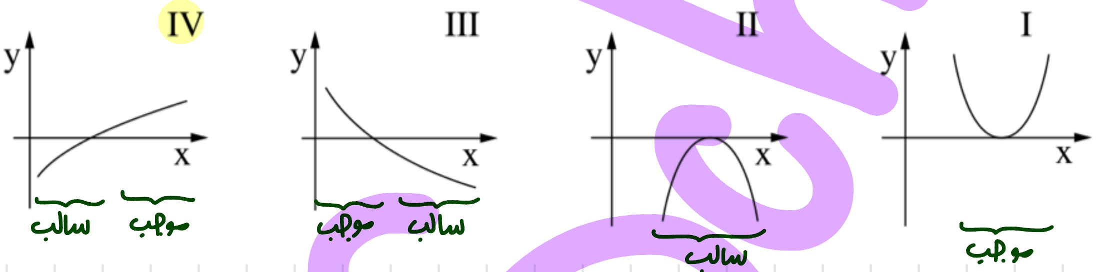
أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة. $x \ge 0$

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

(3) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة.

جـ. أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I ، II ، III ، IV ، يمكن أن يصف دالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $1 \le x \le 10$ ؟ علّل.



أ (2) تقاطع مع y   تقاطع مع x

$f(0) = 0 - 0 = 0$

$(0,0)$

$x \cdot \sqrt{4x} - 6x = 0$

$x\sqrt{4x} = 6x \quad |^2$

$x^2 \cdot 4x = 36x^2$

$4x^3 - 36x^2 = 0$

$4x(x-9) = 0$

$x = 0, 9$

$(0,0) \quad (9,0)$

أ (3) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4x} + \frac{4}{2\sqrt{4x}} \cdot x - 6$

$\boxed{f'(x) = \sqrt{4x} + \frac{2x}{\sqrt{4x}} - 6} = 0 \quad | \cdot \sqrt{4x}$

$4x + 2x - 6\sqrt{4x} = 0$

$6x = 6\sqrt{4x} \quad | :6$

$x = \sqrt{4x} \quad |^2$

$x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0 \qquad x = 4$

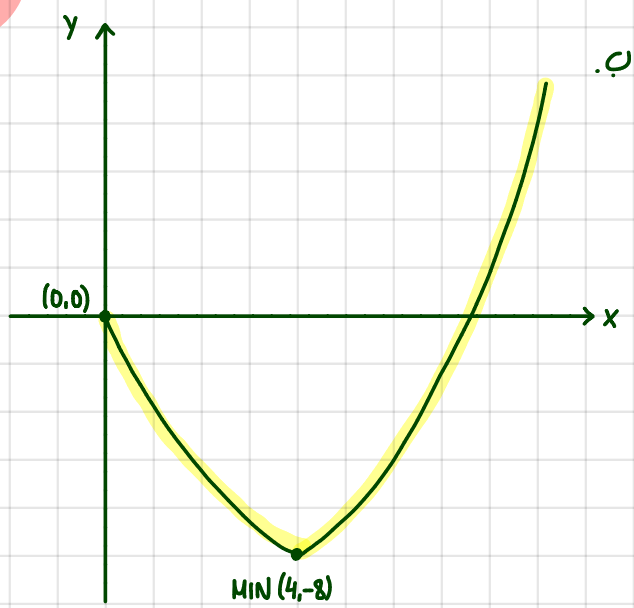
$(0,0) \qquad f(4) = 4 \cdot \sqrt{16} - 6 \cdot 4 = -8$

$(4,-8)$

جدول بحث :

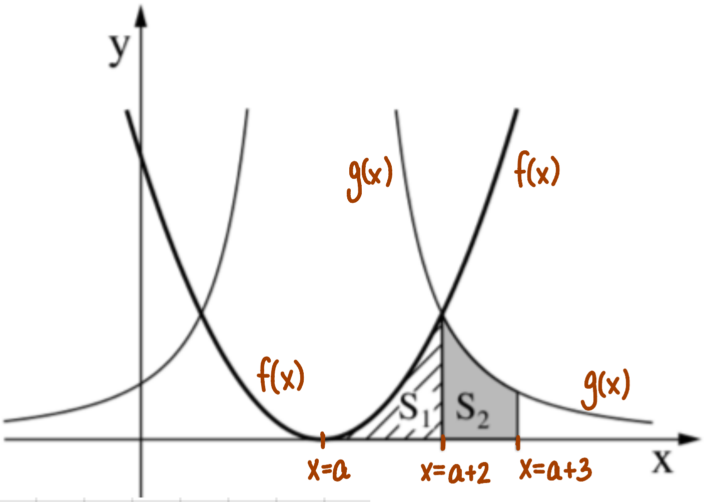
	$x<0$	$x=0$	$4>x>0$ $(x=1)$	$x=4$	$x>4$ $(x=5)$
f'		0	-3	0	0.708
f		$(0,0)$ MAX	↘	$(4,-8)$ MIN	↗

ب.



ج. الدالة تنازلية ثم تصاعدية.
مشتقة الدالة سالبة ثم موجبة ⇐ رسم IV

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٨



.8 يعرض الرسم الذي أمامك الرسمين البيانيّين

للدالّتين: $f(x) = (x-a)^2$ دالة تربيعية

$g(x) = \frac{16}{(x-a)^2}$ دالة نسبية

a هو بارامتر أكبر من 0 .

أ. جد خطوط التقارب الموازية

للمحورين للدالّة g(x) (عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة).

إحدى نقاط التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين هي النقطة التي فيها $x = a + 2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة f(x) والمحور x

والمستقيم $x = a + 2$ (المساحة المخطّطة في الرسم).

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة g(x) والمحور x

والمستقيمين $x = a + 2$ وَ $x = a + 3$ (المساحة الرماديّة في الرسم).

ب. احسب النسبة $\frac{S_1}{S_2}$.

أ. خط تقارب عامودي g(x) : $x = a$

خط تقارب افقي : $y = 0$

(القوى المتغيّر بالمقام اكبر)

ب. نجد نقطة تقاطع الدالة التربيعية مع محور x : $(x-a)^2 = 0$

$x = a$

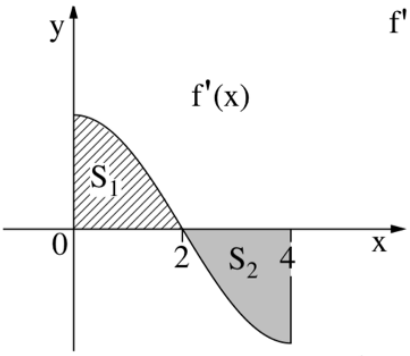
$(a,0)$

$$S_1 = \int_a^{a+2} f(x)dx = \int_a^{a+2} (x-a)^2 dx = \left(\frac{(x-a)^3}{3\cdot 1}\right)\Big|_a^{a+2} = \frac{(a+2-a)^3}{3} - \frac{(a-a)^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_{a+2}^{a+3} g(x)dx = \int_{a+2}^{a+3} \frac{16}{(x-a)^2}dx = \left(\frac{16\cdot(-1)}{(x-a)^1}\right)\Big|_{a+2}^{a+3} = \left(\frac{-16}{x-a}\right)\Big|_{a+2}^{a+3} = \frac{-16}{a+3-a} - \frac{-16}{a+2-a}$$

$$= \frac{-16}{3} + \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = 1$$



9. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $0 \le x \le 4$.

الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ يقطع المحور x في النقطة التي فيها $x = 2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحورين (المساحة المخطّطة في الرسم).

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x والمستقيم $x = 4$ (المساحة الرماديّة في الرسم).

أ. (1) معطى أنّ: $f(0) = 0$ ، $S_1 = 4$.

احسب $f(2)$.

(2) معطى أيضًا أنّ: $S_2 = 4$.

احسب $f(4)$.

ب. جد إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى، وحدّد نوع هذه النقطة. علّل.

جـ. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى.

أ1. $S_1 = \int_0^2 f'(x)\,dx = \left(f(x)\right)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) \longrightarrow f(2) - f(0) = S_1$

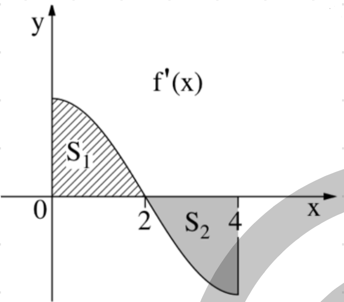
$f(2) - 0 = 4$

$f(2) = 4 \longrightarrow (2,4)$

أ2. $S_2 = -\int_2^4 f'(x)\,dx = -\left(f(x)\right)\Big|_2^4 = -\left(f(4) - f(2)\right) \longrightarrow -f(4) + f(2) = S_2$

$-f(4) + 4 = 4$

$f(4) = 0 \longrightarrow (4,0)$



ب. النقاط القصوى الداخلية تحقّق $f'(x)=0$, اي عندما الرسم البياني للمشتقة تقطع محور x.
حسب الرسمة، عندما $x=2$ للدالة يوجد نقطة قصوى. حسب البند أ1 النقطة $(2,4)$.
نوع النقطة :

	$2>x>0$	$x=2$	$4>x>2$
f'	+	0	−
f	↗	MAX	↘

ج. نحصل على المعطيات
$(0,0)$
$(4,0)$
$(2,4)$ MAX