

הסתברות מותנית - נוסחת בייס

נוסחת בייס

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

על העתים A ו B :
 $P(A), P(B) \neq 0$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

مثال 1:

במסעדה עובדים שני טבחים: טבח א' וטבח ב'.
כשאחד הטבחים עובד, השני בחופשה. טבח א' עובד ב- 75% מהימים.
טבח א' נוהג להגיש סלט חצילים כמנה ראשונה לעתים רחוקות,
רק ב- 15% מהארוחות שהוא מגיש.
טבח ב' מגיש סלט חצילים כמנה ראשונה ב- 50% מהארוחות שהוא מגיש.
באנו למסעדה והוגש לנו סלט חצילים כמנה ראשונה.
מהי ההסתברות שבאותו יום טבח א' הוא שעבד במסעדה?

פתרון:

נסמן ב- A את המאורע: "טבח א' עבד" ונסמן ב- B את המאורע:
"הוגש סלט חצילים". יש לחשב את ההסתברות המותנית: $P(A|B)$.
נתון כי: $P(A) = 0.75$ ולכן: $P(\bar{A}) = 0.25$.
נתונות גם ההסתברויות המותנות: $P(B|A) = 0.15$, $P(B|\bar{A}) = 0.5$.
כדי לחשב את ההסתברות המותנית $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

נרצה להיעזר בנוסחת בייס:

אך תחילה יש למצוא את $P(B)$ ונעשה זאת בעזרת נוסחת ההסתברות השלימה:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(B) = 0.15 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.2375$$

נציב ונקבל:

נציב את $P(B)$ שקיבלנו ואת שאר ההסתברויות שידועות

$$P(A|B) = \frac{0.15 \cdot 0.75}{0.2375} = \frac{9}{19} \approx 0.4737$$

בנוסחת בייס, ונקבל:

(זכי יקראו כתיב י"א - 804)
חלק ד' - פרק 26

(5) בגינה של שושנה ישנם פרחים אדומים ופרחים צהובים (אין צבע אחר).

75% מהפרחים הם אדומים, והשאר – צהובים.

הפרחים האדומים, לרובם אין ריח; רק ל-10% מהם יש ריח.

לעומתם, ל-80% מהפרחים הצהובים יש ריח ורק ל-20% מהם אין ריח.

ביקשו ממני לעצום עיניים ונתנו לי פרח מהגינה של שושנה. לפרח היה ריח.

מהי ההסתברות לכך שהפרח שהרחתי הוא אדום?

(5) $\frac{11}{9}$

(11) בכד ישנם 5 כדורים: 3 שחורים ו-2 לבנים. מוציאים באקראי כדור מהכד

ורואים מה צבעו. אם הכדור לבן הוא מוחזר לכד ואם הכדור שחור אז משאירים

אותו מחוץ לכד.

לאחר מכן מוציאים 3 פעמים כדור מהכד עם החזרה (כלומר בכל פעם מוציאים

את הכדור, רואים מה צבעו ומחזירים אותו לכד).

(א) חשבו את ההסתברות לכך שבסך-הכל הוצאו שני כדורים שחורים ושני

כדורים לבנים.

(ב) ידוע שבסך-הכל הוצאו יותר כדורים לבנים משחורים. מהי ההסתברות

שהכדור הראשון שהוצא היה כדור לבן?

(11) (א) 0.3978

(ב) $\frac{704}{1079} \approx 0.652$

(15) בתוך כיתה נמצאים x תלמידים, מתוכם 4 בנים. מוציאים באקראי תלמיד

אחד מהכיתה. אם הוא בן אז מבקשים ממנו לחזור לכיתה ושוב מוציאים

באקראי תלמיד מהכיתה. לעומת זאת, אם התלמיד הראשון שהוצא הוא בת, אז

מבקשים ממנה להישאר מחוץ לכיתה ואז מוציאים באקראי תלמיד נוסף.

(א) בטאו על-ידי x את ההסתברות שהתלמיד השני שהוצא מהכיתה הוא בת.

(ב) ידוע שאם התלמיד השני שהוצא מהכיתה הוא בת, אז ההסתברות

שהתלמיד הראשון שהוצא מהכיתה הוא בן היא $\frac{10}{13}$. מצאו את x.

(15) (א) $9 = x$

(15) (א) $\left(\frac{1-x}{4} + \frac{x}{x-5}\right) \cdot \frac{x}{x-4}$