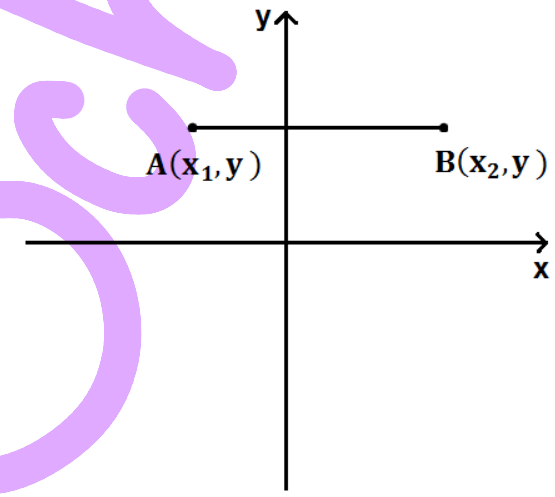
رياضيات - الهندسة التحليلية

حسابة البُعد بين نقطتين

هل للنقطتين نفس احداثيّ x أم نفس احداثيّ y؟

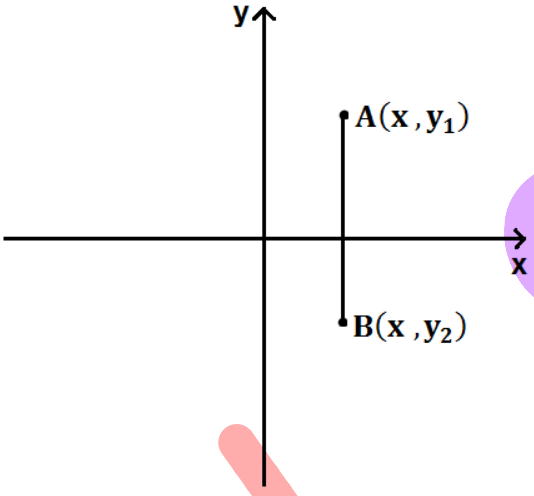
نعم! للنقطتين نفس احداثيّ y



البعد = الفرق بين احداثيات ال- x

$$AB = |\Delta x| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

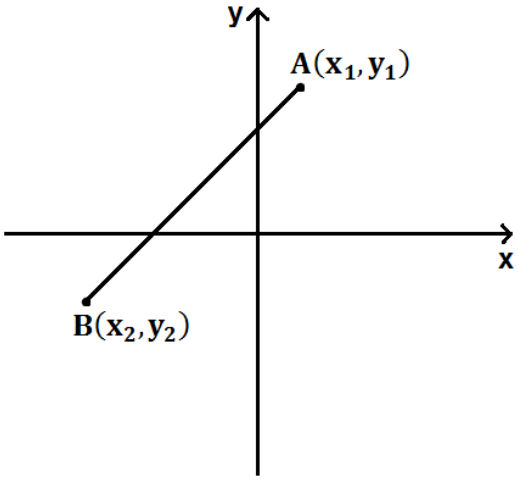
نعم! للنقطتين نفس احداثيّ x



البعد = الفرق بين احداثيات ال- y

$$AB = |\Delta y| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

لا!

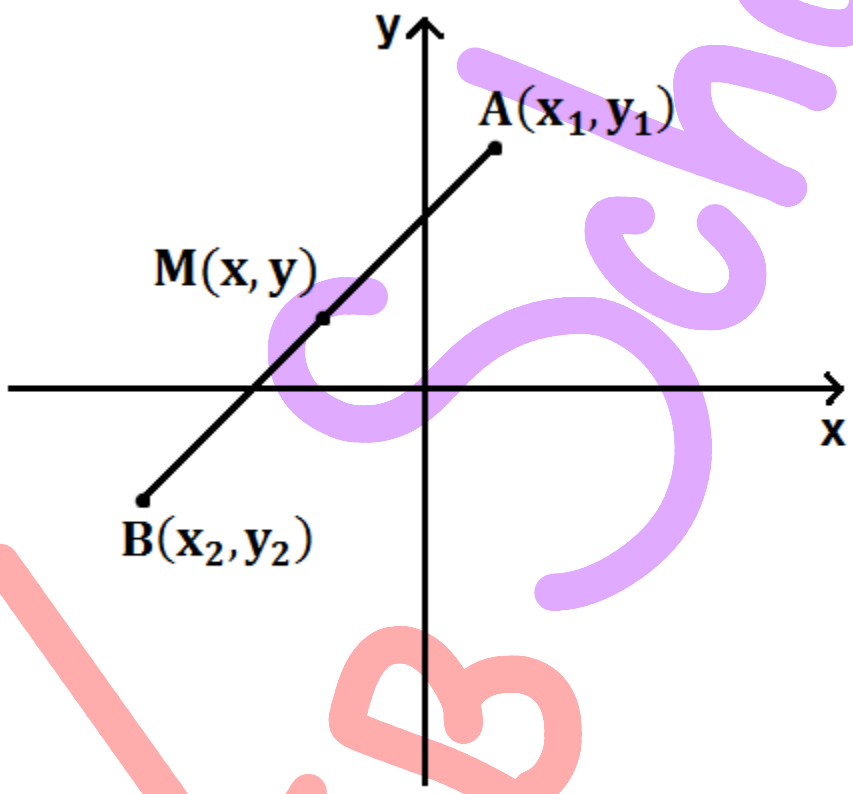


$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

VEB School

حسابة احداثيّات نقطة وسط القطعة

النقطة M هي وسط القطعة AB



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

VEB School

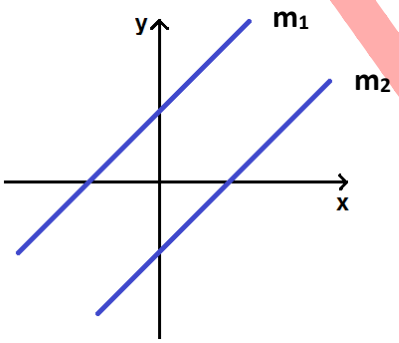
حسابة معادلة خط مستقيم

$$y = m \cdot x + n$$

$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
المستقيم/الدالة تنازلية	المستقيم يوازي محور x /الدالة ثابتة	المستقيم/الدالة تصاعدية

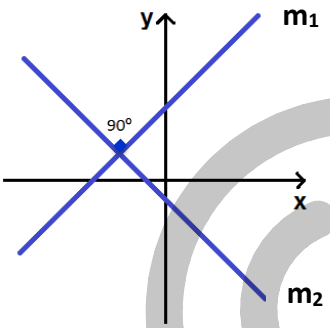
طرق حسابة معادلة خط مستقيم	
اذا معطى **احداثيات نقطتين** تقع على الخط المستقيم	اذا معطى **ميل** الخط و**احداثيات نقطة** تقع على الخط المستقيم
(x_1, y_1) (x_2, y_2)	m (x_1, y_1)
1. نجد الميل (m) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	نعوّض في القانون: $y - y_1 = m(x - x_1)$
2. نعوّض الميل واحداثيات احدى النقطتين ونجد قيمة **n**.	

تذكروا!



مستقيمات متوازية ⟺ **للمستقيمات نفس الميل**

$m_1 = m_2$



مستقيمات متعامدة ⟺ **حاصل ضرب ميلي المستقيمات (-1)**

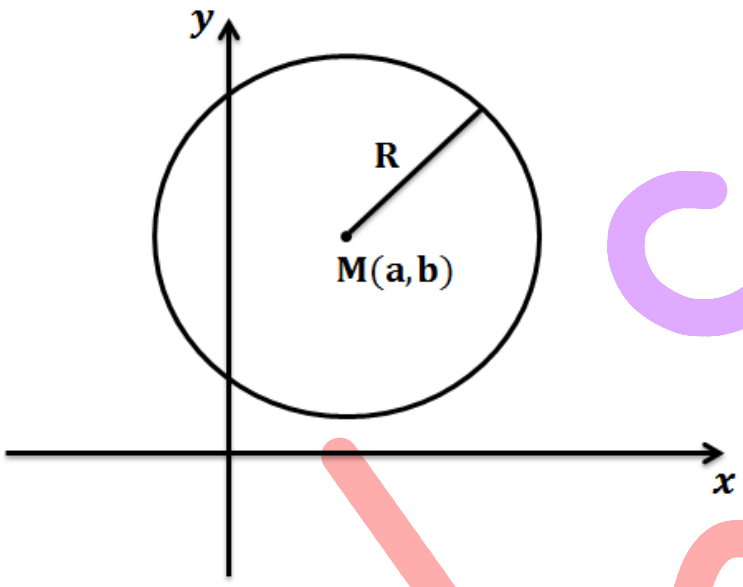
$m_1 \cdot m_2 = -1$

VEB School
© VEB School فيفيان إيفان بشوتي

رياضيات - الهندسة التحليلية

الدائرة

معادلة الدائرة تتعلق باحداثيّات مركزها وبطول نصف قطرها.
نرمز لمركز الدائرة بالنقطة M, احداثيّاتها: $M(a,b)$, ولنصف القطر بالحرف R.



معادلة الدائرة:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

*حالة خاصة

دائرة تقع مركزها بنقطة الأصل $M(0,0)$
تسمّى "دائرة أصليّة" ومعادلتها: $\boxed{x^2+y^2=R^2}$

© VEB School

مكان نقطة بالنسبة للدائرة

معطى دائرة معادلتها: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, ومعطاة نقطة احداثيّاتها (x_1,y_1).

نحدّد مكان النقطة بالنسبة للدائرة عن طريق تعويض النقطة في معادلة الدائرة:

تقع النقطة **داخل** الدائرة $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2<R^2$

تقع النقطة **على** الدائرة $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2$

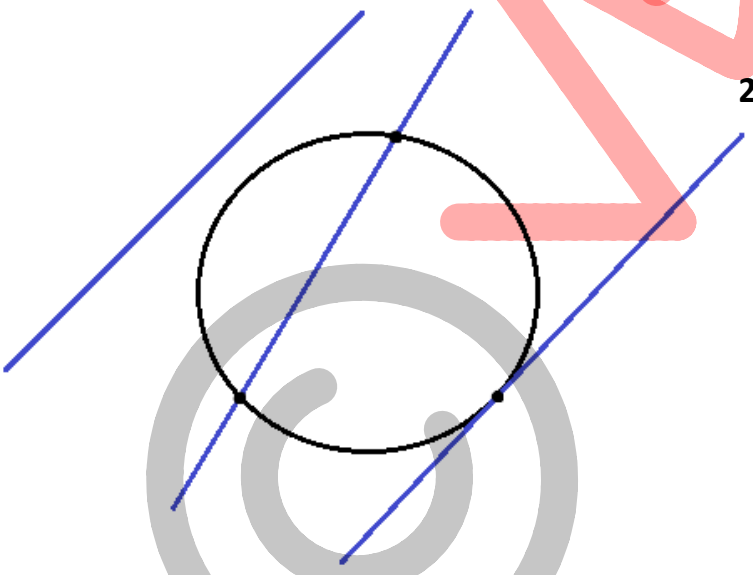
تقع النقطة **خارج** الدائرة $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2>R^2$

أوضاع متبادلة بين مستقيم ودائرة

معطى دائرة معادلتها: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, ومعطاة خط مستقيم معادلته $y=mx+n$.

نحدّد الوضع المتبادل بين المستقيم والدائرة عن طريق حل هيئة معادلات الدائرة والمستقيم:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ y=mx+n\end{cases}$$



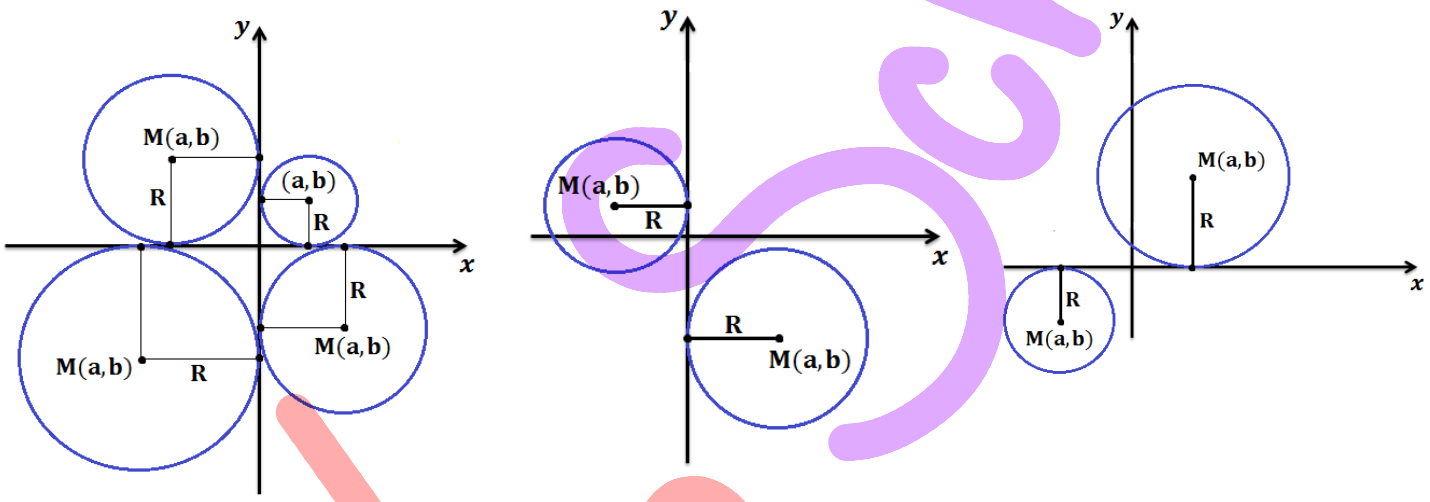
1	**يوجد حللين**
	المستقيم **يقطع** الدائرة (يوجد لهما نقطتان مشتركتان)
2	**يوجد حل واحد**
	المستقيم **يمس** الدائرة (يوجد لهما نقطة مشتركة واحدة)
3	**لا يوجد حل**
	المستقيم **خارج** الدائرة (لا يوجد بينهما أيّة نقطة مشتركة)

VEB School

دائرة تمس المحاور

معطى دائرة معادلتها: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

تمس محور x	تمس محور y	تمس محور x و y
$R=\|b\|$	$R=\|a\|$	$R=\|a\|=\|b\|$

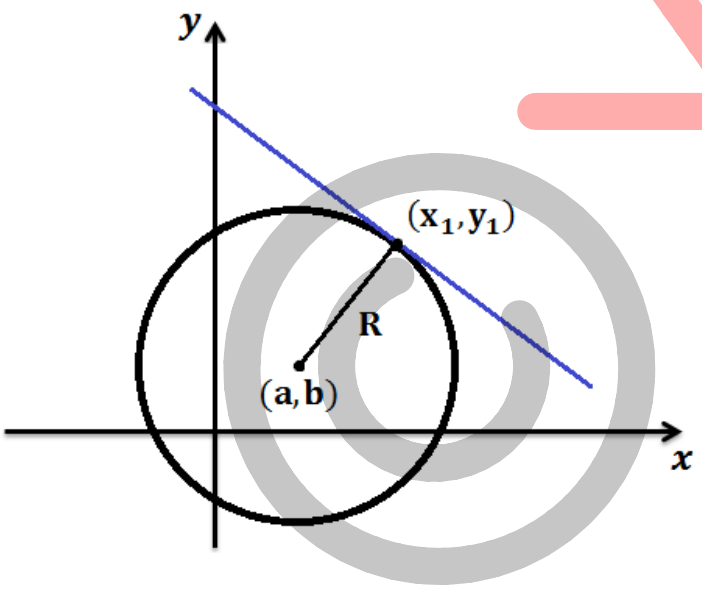


معادلة المماس لدائرة

معطى دائرة معادلتها: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, مدّوا مماس للدائرة بالنقطة (x_1,y_1).

نظرية مهمة!

في الدائرة, المماس يعامد نصف قطر الدائرة في نقطة التماس.



1. نجد ميل الخط الواصل بين مركز الدائرة ونقطة التماس (m_R)
2. نجد ميل المماس

$$m_{\text{مماس}} \cdot m_R = -1$$

3. نجد معادلة المماس

VEB School

رياضيات - حسابة التفاضل

ميل الرسم البياني للدالة

ميل مستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل دوال رسمها البياني ليس خطاً مستقيماً

ليس لها ميل ثابث, بكل نقطة يوجد ميل مختلف: بالمجالات التصاعدية الميول موجبه وبالمجالات التنازليه الميول سالبه وفي النقاط القصوى الميل صفر.

ميل الدالة في نقطة معيّنه هي ميل المماس للرسم البياني للدالة في نفس النقطة.

ميل المماس للدالة في نقطة التماس x = المشتقة للدالة في النقطة x

---

مشتقّة دوال كثير الحدود (بولينوم) وقوانين اشتقاق

الدالة المشتقّة $f'(x),\ y'$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(c \cdot x)' = c$$

$$(c)' = 0$$

* c هو عدد

© VEB School

ميل الرسم البياني في نقطة

نعوضّ احداثيات x للنقطة بمشتقة الدالة ليجادة ميل المماس في النقطة.

ايجاد نقطة على الرسم البياني للدالة,
اذا كان معطى ميل الرسم البياني في هذه النقطة

نجد المشتقة للدالة وثمّ نجد النقطة بها يساوي الميل المعطى

معادلة المماس للرسم البياني للدالة
في نقطةٍ معطاةٍ على الرسم البياني للدالة (x_0, y_0)

احداثيات نقطة التماس	$f(x_0) = (x_0, y_0)$
ميل المماس بالنقطة	$f'(x_0) = (x_0, y_0)$

1. نعوّض x_0 بالدالة $f(x_0)$ لإيجادة **النقطة** (نقطة التماس)
2. نعوّض x_0 بمشتقة الدالة $f'(x_0)$ لإيجادة **ميل المماس**
3. نعوّض بـ- $y = mx + n$ ونجد **معادلة المماس**

VEB School

© VEB School فيڤيان إيڤان بشوتي

مجالات التصاعد والتنازل, نقاط قصوى

دالة تصاعدية بنقطة/مجال	دالة تنازلية بنقطة/مجال	نقاط قصوى (نهاية عظمى/صغرى/التواء)
قيمة الدالة f(x) **تكبر** حين **يكبر** x	قيمة الدالة f(x) **تصغر** حين **يكبر** x	-
ميل المماس للرسم البياني للدالة في النقطة **موجباً**	ميل المماس للرسم البياني للدالة في النقطة **سالباً**	ميل المماس للرسم البياني للدالة في النقطة **صفراً** (يوازي محور x)
$\mathbf{f'(x) > 0}$	$\mathbf{f'(x) < 0}$	$\mathbf{f'(x) = 0}$

نقطة طرف يسرى هي نقطة طرف يسرى للدالة f(x)

نقطة طرف يمنى هي نقطة طرف يمنى للدالة f(x)

*أثناهما يمكن ان يكونوا MAX او MIN

نقطة نهاية عظمى MAX		نقطة نهاية صغرى MIN	
محلية ميكومي	**مطلقة موحلث**	**محلية ميكومي**	**مطلقة موحلث**
نقطة MAX	هي نقطة MAX التي لها اكبر y	نقطة MIN	هي نقطة MIN التي لها اصغر y

VEB School

استعمال المشتقة ليجاد نقاط قصوى ومجالات التصاعد وتنازل

نجد النقاط القصوى (التي تحقق $f'(x) = 0$), ثم نجد نوعها عن طريق:

طريقة I – جدول بحث

نبحث بالمجالات حول النقطة القصوى x_0 :

I

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	موجبة	تساوي صفر	سالبة
$f(x)$	تصاعدية ↗	**MAX**	تنازلية ↘

II

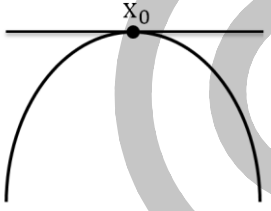
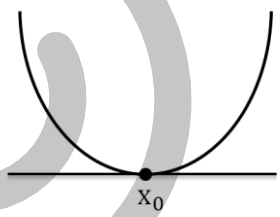
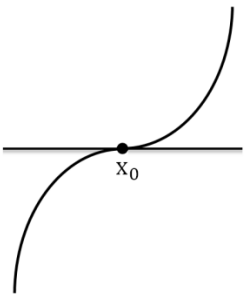
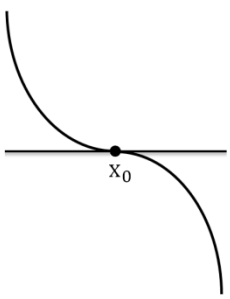
	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	سالبة	تساوي صفر	موجبة
$f(x)$	تنازلية ↘	**MIN**	تصاعدية ↗

III

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	موجبة	تساوي صفر	موجبة
$f(x)$	تصاعدية ↗	**التواء**	تصاعدية ↗

IV

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f'(x)$	سالبة	تساوي صفر	سالبة
$f(x)$	تنازلية ↘	**التواء**	تنازلية ↘

I	II	III	IV
			

VEB School

طريقة II – المشتقة الثانية

نعوّض النقطة x_0 بالمشتقة الثانية للدالة $f''(x)$

$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) > 0$
⇓	⇓	⇓
x_0 هي نقطة التواء	x_0 هي نقطة MAX	x_0 هي نقطة MIN

© VEB School

بحث بدوال كثيرة الحدود (بولينوم)

مراحل البحث

1. **ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين**
2. **ايجادة النقاط القصوى** (التي تحقق $f'(x) = 0$)
3. **بناء جدول بحث, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى** (نقطة MIN/MAX/التواء)
4. **رسم تقريبي للدالة**

* بعد الحل يمكن فحص الجواب بالـ Desmos

بحث الدوال في مجموعات مغلقة

مراحل البحث

1. **ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين**
2. **ايجادة نقطة الطرف اليسرى ونقطة الطرف اليمنى**
3. **ايجادة النقاط القصوى** (التي تحقق $f'(x) = 0$)
4. **بناء جدول بحث اطرافه هي نقاط الطرف اليسرى واليمنى, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى** (نقطة MIN/MAX/التواء)
5. **تعيين نقاط القصوى MAX/MIN المحلية والمطلقة**
6. **رسم تقريبي للدالة**

VEB School

بحث الدالة: $f(x) = (x^2 - 1)^2$

1. ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين

تقاطع الدالة مع محور y :

$$f(0) = (0^2 - 1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 1)$$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1, -1$$

$$(1, 0) \quad (-1, 0)$$

2. ايجادة النقاط القصوى (التي تحقق $f'(x) = 0$)

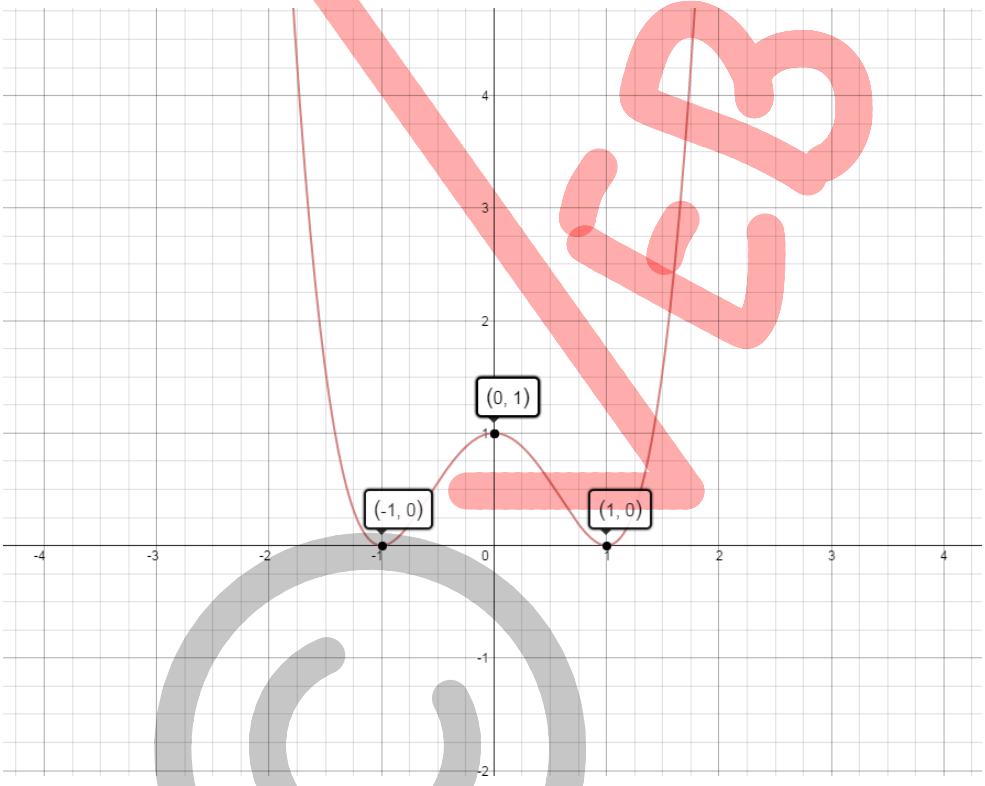
$$f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

$$\rightarrow \quad 4x(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 4x(x - 1)(x + 1) = \quad \rightarrow \quad x = 0, -1, 1$$

3. بناء جدول بحث, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى (نقطة MIN/MAX/التواء)

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	سالب	**0**	موجب	0	سالب	0	موجب
$f(x)$	تنازلية	$(-1, 0)$ **MIN**	تصاعدية	$(0, 1)$ **MAX**	تنازلية	$(1, 0)$ **MIN**	تصاعدية

4. رسم تقريبي للدالة



VEB School ©

بحث الدالة: $f(x) = x^2(x-6)(x-6)$

1. ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين

تقاطع الدالة مع محور y :

$$f(0) = 0^2 \cdot (0-6)(0-6) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{0,0})$$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$x^2(x-6)(x-6) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0,6$$

$$(\mathbf{0,0}) \quad (\mathbf{6,0})$$

2. ايجادة النقاط القصوى (التي تحقق $f'(x) = 0$)

$$f(x) = x^2(x-6)(x-6) = x^2(x^2-12x+36) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$$

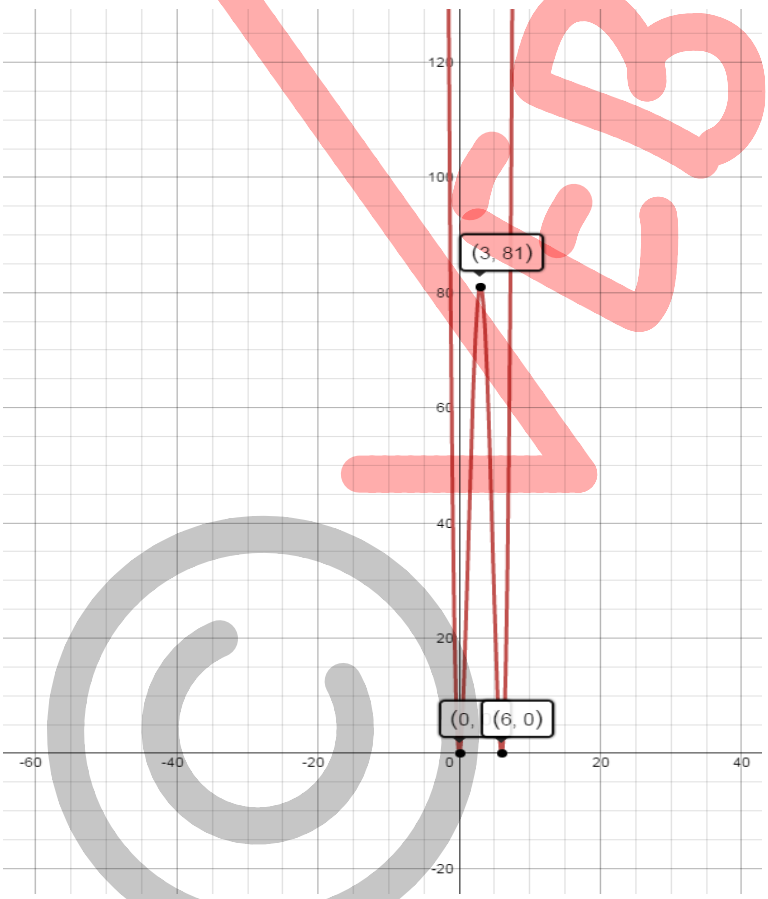
$$\rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 72x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x(x^2-9x+18) = 0$$

$$\rightarrow \quad 4x(x-6)(x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 0,6,3}$$

3. بناء جدول بحث, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى (نقطة MIN/MAX/التواء)

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
$f'(x)$	سالب	**0**	موجب	0	سالب	0	موجب
$f(x)$	تنازلية	$(0,0)$ **MIN**	تصاعدية	$(3,81)$ **MAX**	تنازلية	$(6,0)$ **MIN**	تصاعدية

4. رسم تقريبي للدالة



VEB School

بحث الدالة: $y = x(x+5)(3-x)$

1. ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين

تقاطع الدالة مع محور y :

$$y = 0 \cdot (0+5)(3-0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{0,0})$$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$x(x+5)(3-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, -5, 3$$

$$(\mathbf{0,0}) \quad (\mathbf{-5,0}) \quad (\mathbf{3,0})$$

2. ايجادة النقاط القصوى (التي تحقق $f'(x) = 0$)

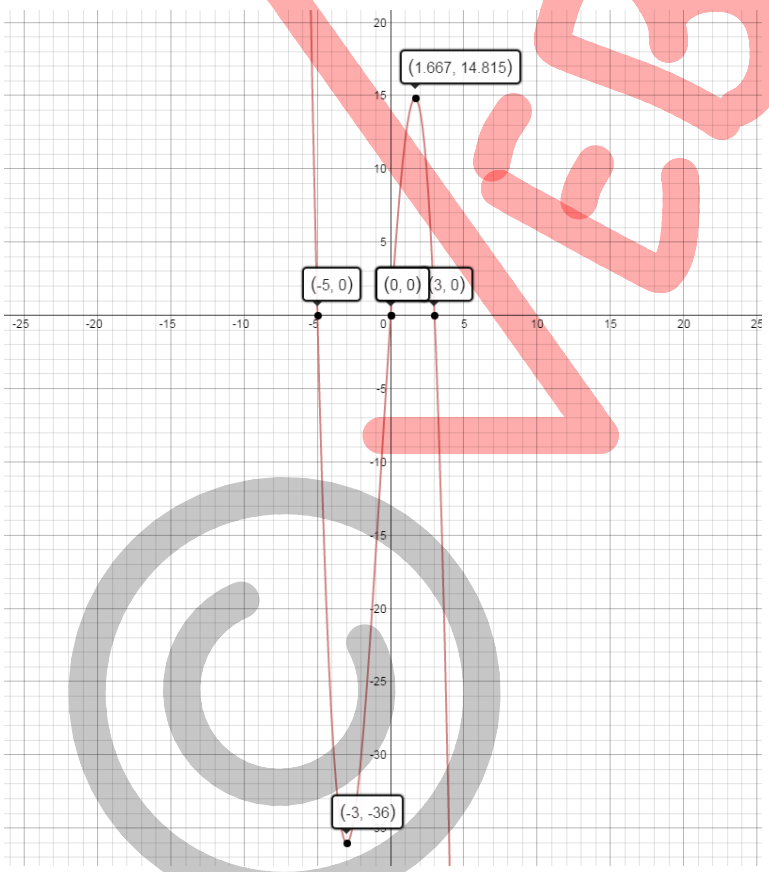
$$f(x) = x(x+5)(3-x) = x(-x^2 - 2x + 15) = -x^3 - 2x^2 + 15x$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = -3x^2 - 4x + 15 = 0 \xrightarrow{\text{دستور}} \mathbf{x = -3, 1.667}$$

3. بناء جدول بحث, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى (نقطة MIN/MAX/التواء)

	$x < -3$	$x = -3$	$0 < x < 3$	$x = 1.667$	$x > 1.667$
$f'(x)$	سالب	**0**	موجب	0	سالب
$f(x)$	تنازلية	$(-3, -36)$ **MIN**	تصاعدية	$(1.667, 14.815)$ **MAX**	تنازلية

4. رسم تقريبي للدالة



VEB School

بحث الدالة: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ في المجموعة المغلقة $[-1, 3]$

1. ايجاد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين

تقاطع الدالة مع محور y :

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$2x^3 - 9x^2 + 12x = 0 \quad \rightarrow \quad x(2x^2 - 9x + 12) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, -5, 3$$

$$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (-\mathbf{5}, \mathbf{0}) \quad (\mathbf{3}, \mathbf{0})$$

2. ايجادة نقطة الطرف اليسرى ونقطة الطرف اليمنى

نقطة الطرف اليسرى :

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) = -23 \quad \rightarrow \quad (-\mathbf{1}, -\mathbf{23})$$

نقطة الطرف اليمنى :

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 17.5 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{3}, \mathbf{9})$$

3. ايجادة النقاط القصوى (التي تحقق $f'(x) = 0$)

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \ \backslash : 6$$

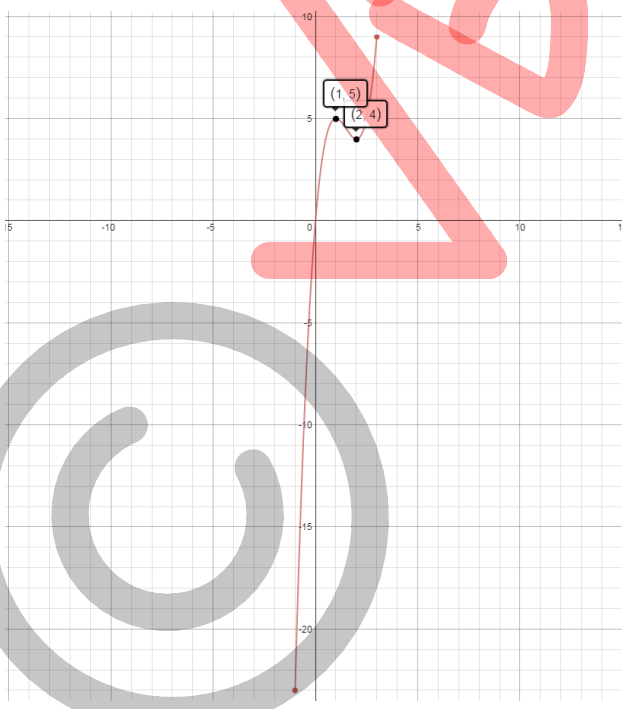
$$\rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{دستور}} \mathbf{x = 2, 1}$$

3. بناء جدول بحث اطرافه هي نقاط الطرف اليسرى واليمنى, ايجادة مجلات التصاعد ومجالات التنازل وايجاد نوع النقاط القصوى (نقطة MIN/MAX/التواء)

4. تعيين نقاط القصوى MAX/MIN المحلية والمطلقة

	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$0 < x < 3$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$
$f'(x)$	-	موجب	**0**	سالب	0	موجب	-
$f(x)$	$(-1, -23)$ **MIN مطلقة**	تصاعدية	$(1, 5)$ **MAX محلية**	تنازلية	$(2, 4)$ **MIN محلية**	تصاعدية	$(3, 9)$ **MAX مطلقة**

5. رسم تقريبي للدالة



VEB School

بحث الدالة: $f(x)=\frac{1}{x}$

تفسير كيفيّة حسابة المشتقة:

$$\left(f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \xrightarrow{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}} f'(x)=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}\right)$$

اذاَ نلخّص:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}$$

مجال التعريف لكل دالة بها $\frac{1}{x}$ هو $x\neq 0$

(أي يمكن تعويض بالـ x كل الاعداد ما عدا الـ 0, لأنّ القسمة على 0 غير معرّف)

خط التقارب العامودي لكل دالة بها $\frac{1}{x}$ هو $x=0$ (محور y)

(أي انّ الدالة تقترب لمحور y لكن لا تقطعه)

ملاحظة هامه: عند بناء جدول بحث, لا يوجد قيمة للدالة بالـ $x=0$

قانون العام:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}}$$

VEB School

بحث الدالة: $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$

1) مجال التعويض

$x \neq 0$

2) خط التقاربي العامودي

$x = 0$

3) تقاطع الدالة مع المحاور

لا يوجد نقاط تقاطع مع محور y لأن $x \neq 0$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{3}{x} \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x = \pm 3$$

$$\rightarrow \quad (3,0) \quad (-3,0)$$

4) ايجاد النقاط القصوى

$$y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2} = 0$$

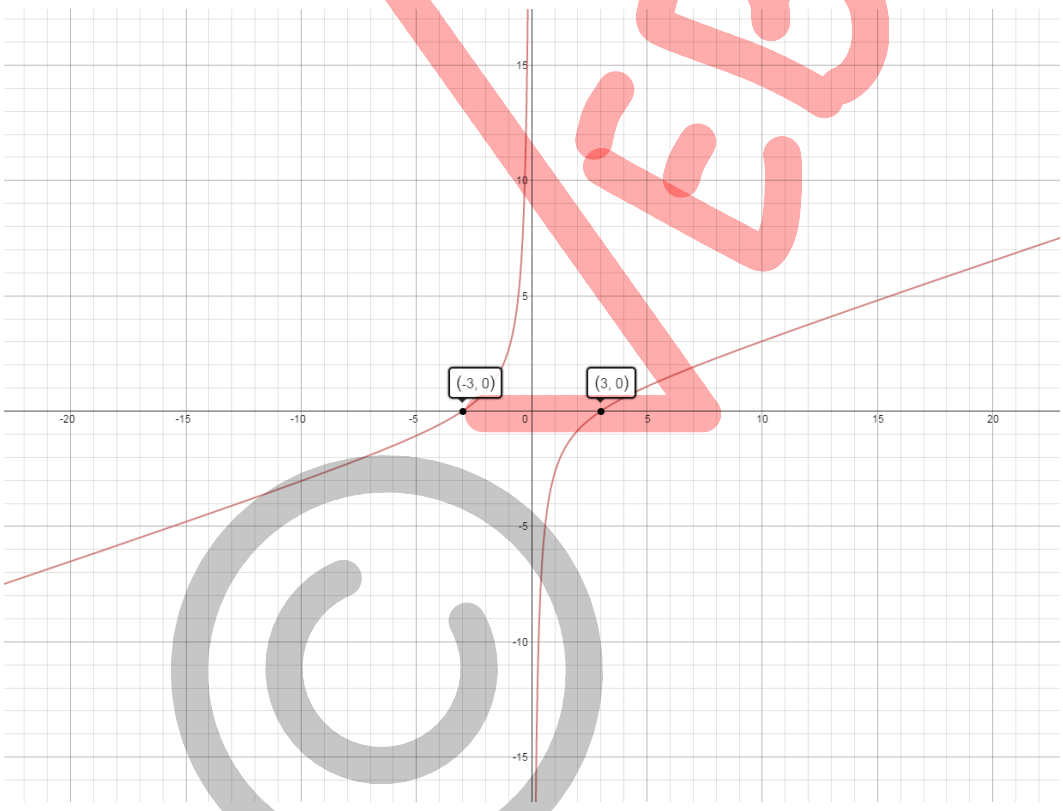
$$\rightarrow \quad \frac{1}{3} = -\frac{3}{x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = -9 \quad \rightarrow \quad \emptyset$$

لا يوجد نقاط قصوى

5) جدول بحث

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
y'	موجب		موجب
y	تصاعدية		تصاعدية

6) رسم تقريبي للدالة



VEB School
© VEB School فيڤيان إيڤان بشوتي

بحث الدالة: $y = \frac{x^2+2x+4}{x}$

1) مجال التعويض

$x \neq 0$

2) خط التقاربي العامودي

$x = 0$

3) تقاطع الدالة مع المحاور

لا يوجد نقاط تقاطع مع محور y لأن $x \neq 0$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$\frac{x^2+2x+4}{x} = 0 \setminus \cdot x \quad \rightarrow \quad x^2+2x+4 = 0 \xrightarrow{\text{دستور}} \emptyset$$

لا يوجد نقاط صفرية

4) ايجاد النقاط القصوى

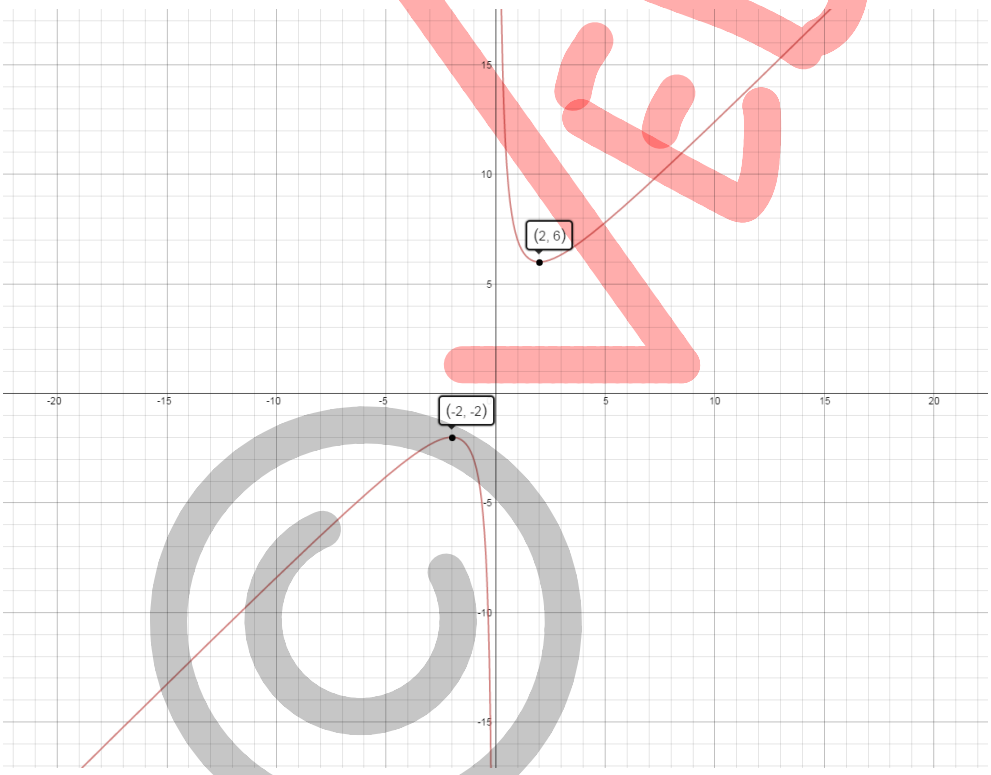
$$y = \frac{x^2+2x+4}{x} = x+2+\frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad y' = 1+4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{4}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \quad 1 = \frac{4}{x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

5) جدول بحث

	$x < -2$	$x = -2$	$0 > x > -2$	$x = 0$	$2 > x > 0$	$x = 2$	$x > 2$
y'	موجب	0	سالب		سالب	0	موجب
y	تصاعدية	$(-2,-2)$ **MAX**	تنازلية		تنازلية	$(2,6)$ **MIN**	تصاعدية

6) رسم تقريبي للدالة



VEB School

بحث الدالة: $y = \frac{16}{x^2} + x^2$

1) مجال التعويض

$x \neq 0$

2) خط التقاربي العامودي

$x = 0$

3) تقاطع الدالة مع المحاور

لا يوجد نقاط تقاطع مع محور y لأن $x \neq 0$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$\frac{16}{x^2} + x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{16}{x^2} = -x^2 \quad \rightarrow \quad x^4 = -16 \quad \rightarrow \quad x = \emptyset$$

لا يوجد نقاط صفرية

4) ايجاد النقاط القصوى

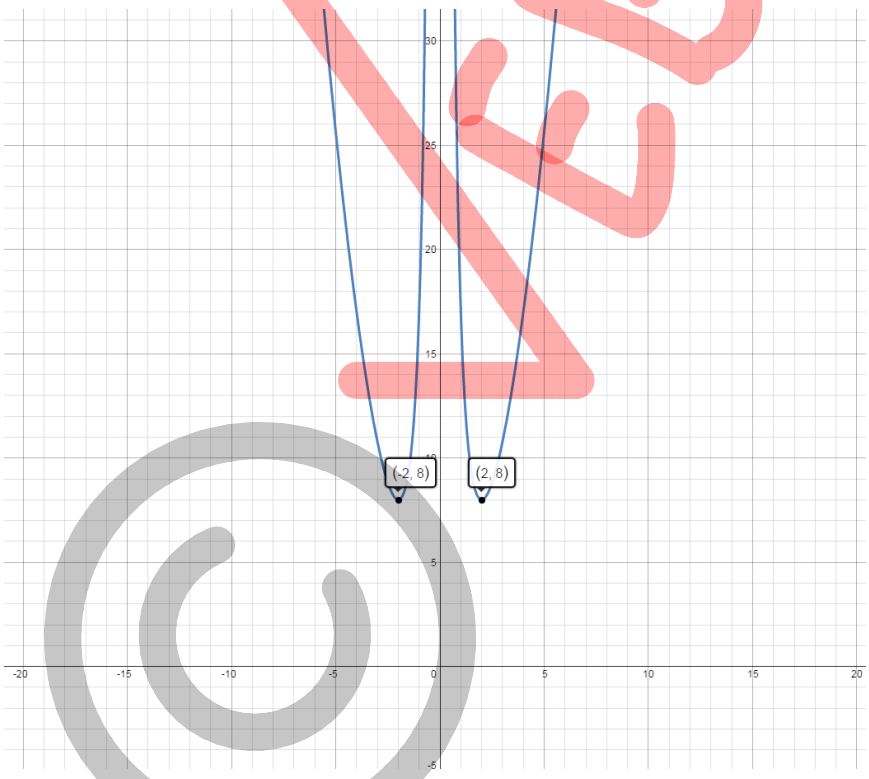
$$y = \frac{16}{x^2} + x^2 \quad \rightarrow \quad y' = 16 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{32}{x^3} + 2x = 0$$

$$\rightarrow \quad 2x = \frac{32}{x^3} \quad \rightarrow \quad 2x^4 = 32 \quad \rightarrow \quad x^4 = 16 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

5) جدول بحث

	$x < -2$	$x = -2$	$0 > x > -2$	$x = 0$	$2 > x > 0$	$x = 2$	$x > 2$
y'	سالب	0	موجب		سالب	0	موجب
y	تنازلية	$(-2, 8)$ MIN	تصاعدية		تنازلية	$(2, 8)$ MIN	تصاعدية

6) رسم تقريبي للدالة



VEB School

بحث الدالة: $f(x)=\sqrt{x}$

تفسير كيفيّة حسابة المشتقة:

$$\left(f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}} f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

اذاَ نلخّص:

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

مجال التعريف لكل دالة بها $\sqrt{x}$ هو $x \geq 0$

(أي يمكن تعويض بالـ x كل الاعداد ما الاعداد السالبة, لأنّ جذر عدد سالب غير معرّف)

كل دالة بها $\sqrt{x}$ تبدأ من $x=0$ (محور y)

(أي انّ لا يوجد رسم بياني للدالة عندما $x<0$)

ملاحظة هامه: عند بناء جدول بحث, لا يوجد قيمة للدالة بالـ $x<0$

VEB School

بحث الدالة: $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$

1) مجال التعويض

$x \geq 0$

2) تقاطع الدالة مع المحاور

تقاطع الدالة مع محور y :

$$f(0) = 4\sqrt{0} - 2 \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{0,0})$$

تقاطع الدالة مع محور x :

$$4\sqrt{x} - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 4\sqrt{x} = 2x \ |^2 \quad \rightarrow \quad 16x = 4x^2 \rightarrow \quad 4x^2 - 16x = 0$$
$$\rightarrow \quad 4x(x-4) = 0$$
$$\rightarrow \quad x = 0, 4$$
$$(\mathbf{0,0})\ (\mathbf{4,0})$$

3) ايجاد النقاط القصوى

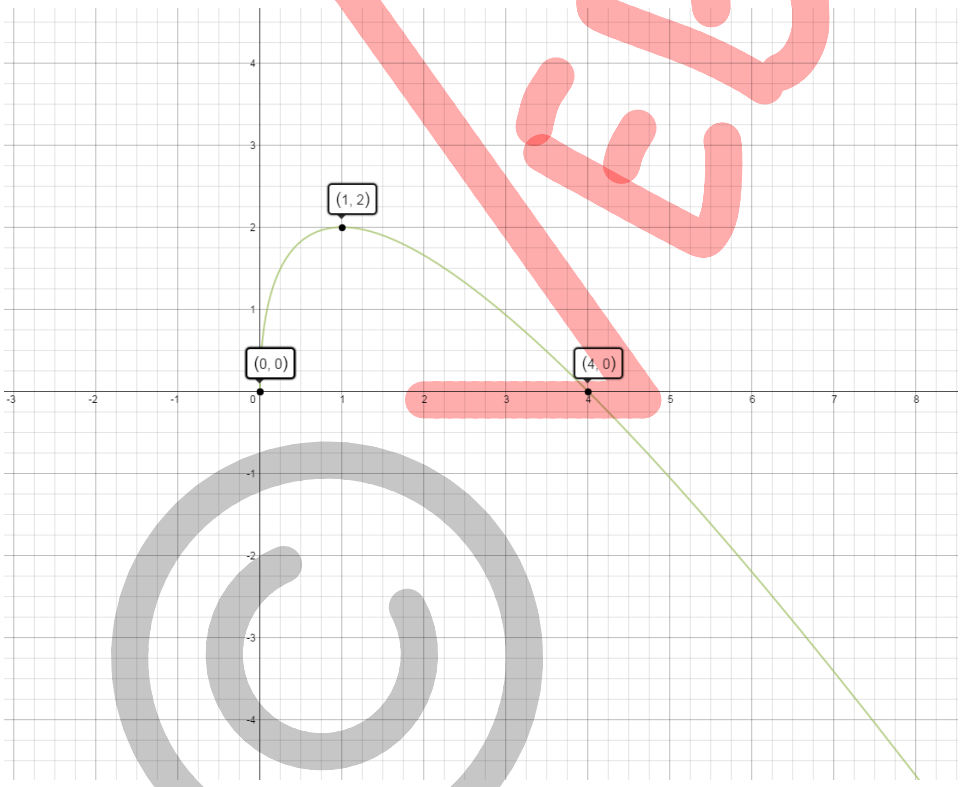
$$f(x) = 4\sqrt{x} - 2x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{x} = 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} = 1 \rightarrow \quad \mathbf{x = 1}$$

4) جدول بحث

	$x < 0$	$1 > x > 0$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$		موجب	0	سالب
$f(x)$		تصاعدية	$(1,2)$ MAX	تنازلية

5) رسم تقريبي للدالة



VEB School

رياضيات - حسابة التكامل

التكامل الغير محدود, تكامل كثير الحدود (بولينوم)

$F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ في مجال معيين.

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$$

عمليّة التكامل هي عمليّة عكسية لعمليّة ايجاد مشتقة $\left(F(x)\right)' = f(x)$

قاعدة تكامل دالة كثيرة الحدود:

$$\boxed{\int (\text{عدد} \cdot x^n)\,dx = \text{عدد} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

c عدد ثابت (ثابت التكامل)

$$\boxed{\int \text{عدد}\,dx = \text{عدد} \cdot x + c}$$

أمثلة:

$$\int (x^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int (24x + 4)\,dx = 24 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 12x^2 + c$$

$$\int (6x^7 - 2x)\,dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c = x^6 - x^2 + c$$

$$\int (5 - 18x^3 + 12x)\,dx = 5x - 18 \cdot \frac{x^4}{4} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 5x - 4.5x^4 + 6x^2 + c$$

VEB School

ايجاد دالة اصليّة حسب مشتقّتها ومعطى اخر

$$\boxed{F(x) = \int f'(x)\,dx + c}$$

الدالة الأصلية تحوي ثابتًا c (ثابت التكامل), نجده عن طريق نقطة معيّنة معطاه يمر عبر الرسم البياني للدالة.

مثال:

مشتقّة الدالة $F(x)$ هي: $f'(x) = 4x^3 - 4$.

أ. أوجد الاحداثي x للنقطة القصوى للدالة $F(x)$, وحدد نوعها.

ب.

$$\int (x^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int (24x + 4)\,dx = 24 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 12x^2 + c$$

$$\int (6x^7 - 2x)\,dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c = x^6 - x^2 + c$$

$$\int (5 - 18x^3 + 12x)\,dx = 5x - 18 \cdot \frac{x^4}{4} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 5x - 4.5x^4 + 6x^2 + c$$

VEB School

التكامل المحدود

التكامل المحدود للدالة $f(x)$ من الحد a وحتى الحد b (بحيث $a < b$) هي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

أمثلة:

$$\int_{-4}^{4} (-4)\,dx = (-4x)\Big|_{-4}^{4} = (-4\cdot 4) - \big(-4\cdot(-4)\big) = -16 - 16 = -32$$

$$\int_0^1 (2x^3 - x)dx = \left(2\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1^4}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^4}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{-1}^{2} (-3x^2 + 2x + 1)dx = \left(-3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = (-x^3 + x^2 + x)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= (-2^3 + 2^2 + 2) - (-(-1)^3 + (-1)^2 - 1) = -2 - 1 = -3$$

$$\int_{2.5}^{4} (2x - 5)^2\,dx = \int_{2.5}^{4} (4x^2 - 20x + 25)dx = \left(4\cdot\frac{x^3}{3} - 20\cdot\frac{x^2}{2} + 25x\right)\Big|_{2.5}^{4}$$

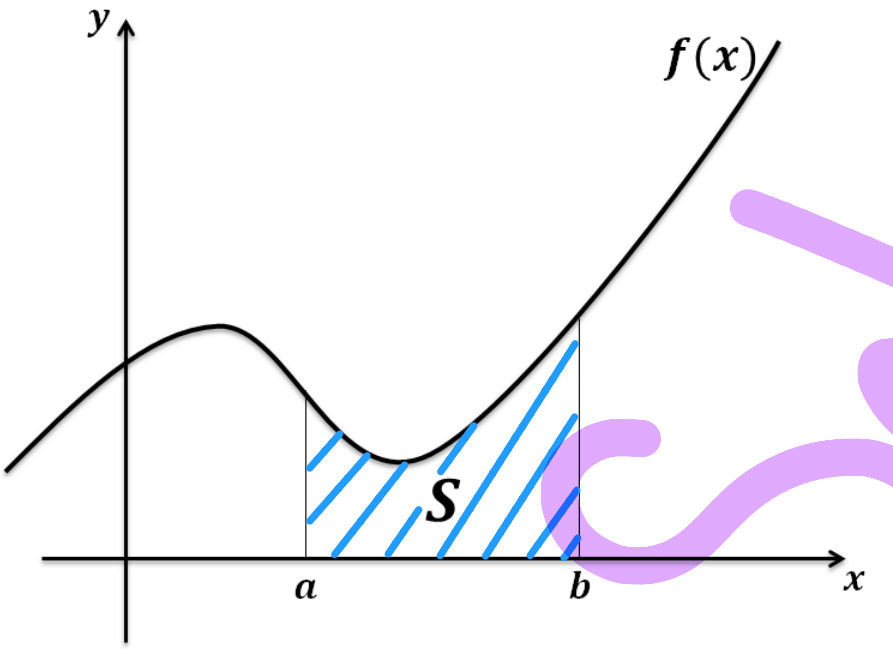
$$= \left(\frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x\right)\Big|_{2.5}^{4}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\cdot 4^3 - 10\cdot 4^2 + 25\cdot 4\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot 2.5^3 - 10\cdot 2.5^2 + 25\cdot 2.5\right)$$

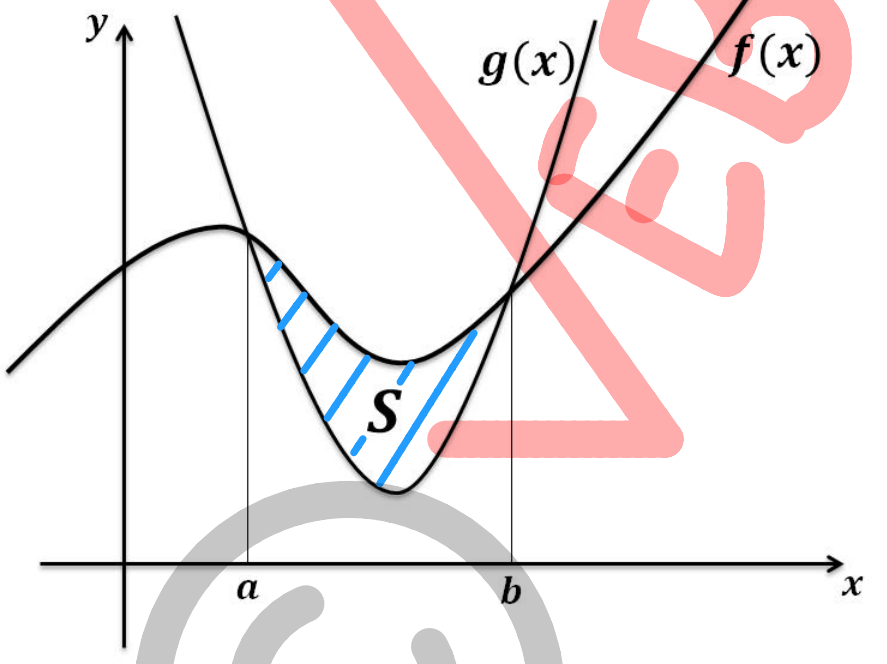
$$= 25.333 - 20.833 = 4.5$$

VEB School

ايجاد مساحات بمساعدة تكاملات

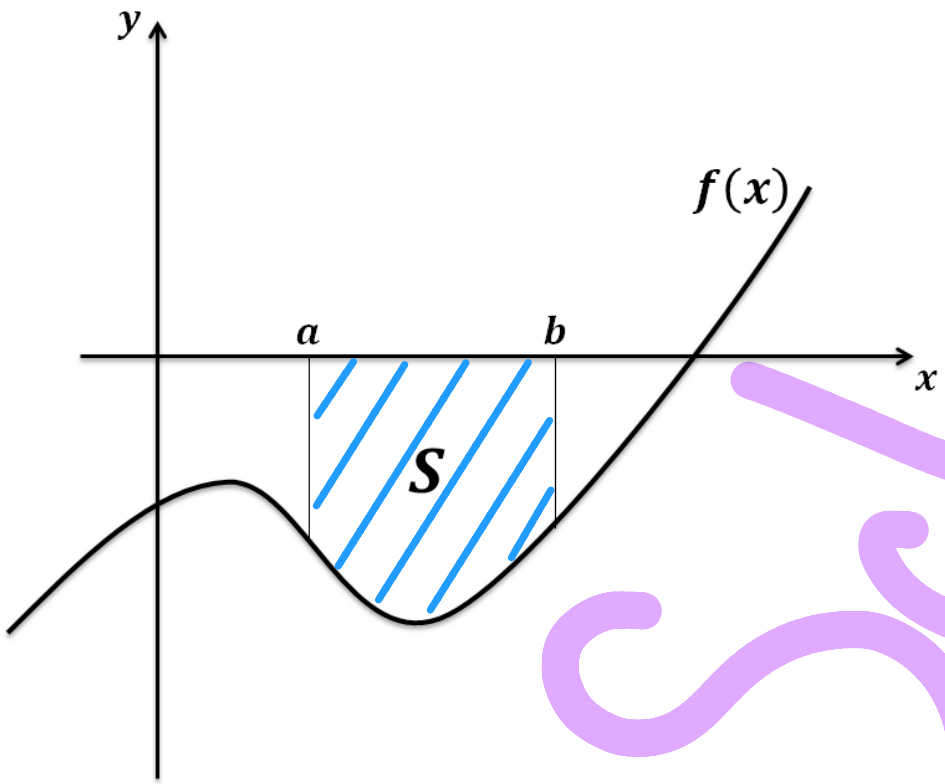


$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

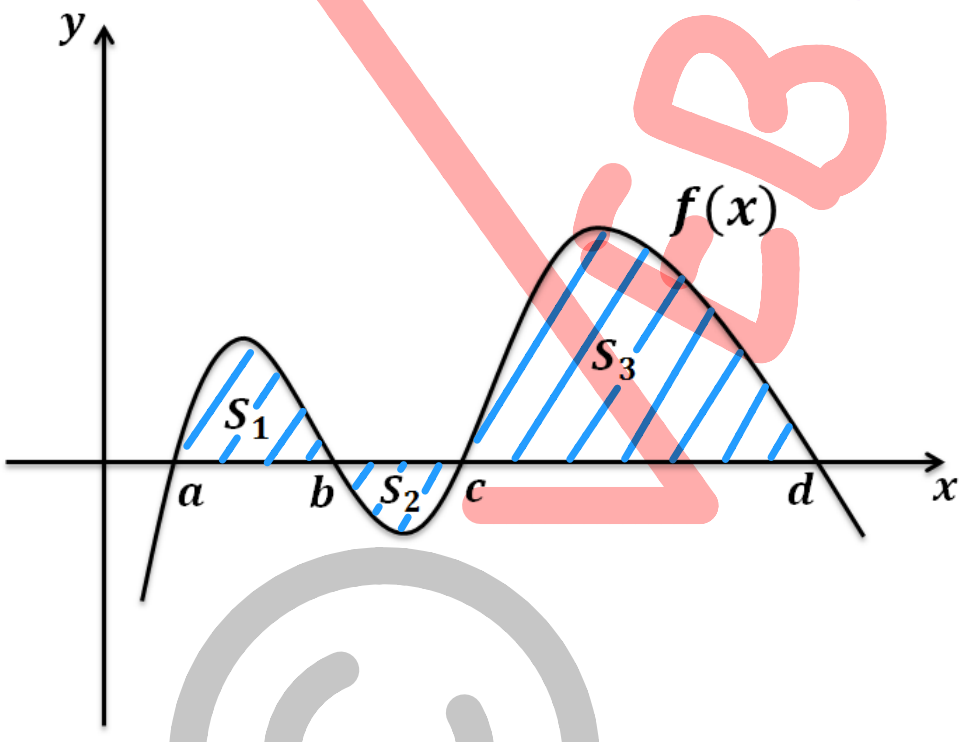


$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

VEB School
© VEB School ڤيڤيان إيڤان بشوتي



$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$



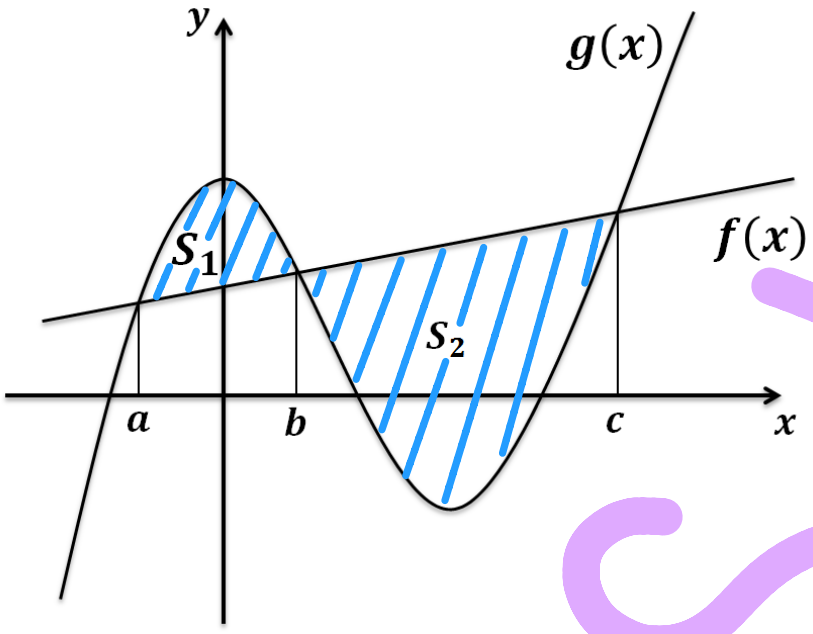
$$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_2 = \left| \int_b^c f(x)\,dx \right|$$

$$S_3 = \int_c^d f(x)\,dx$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

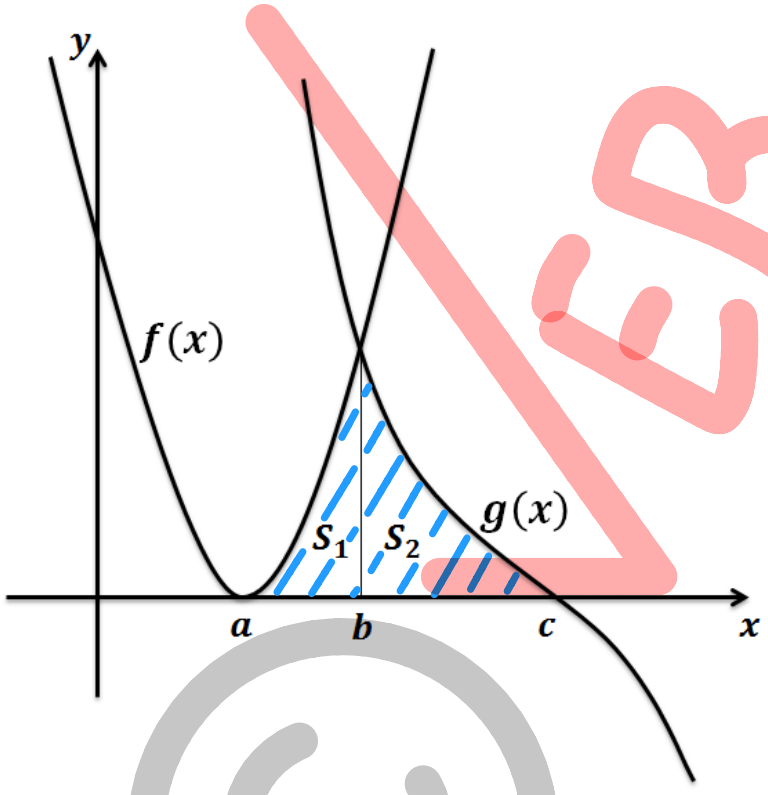
© VEB School



$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x))\,dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

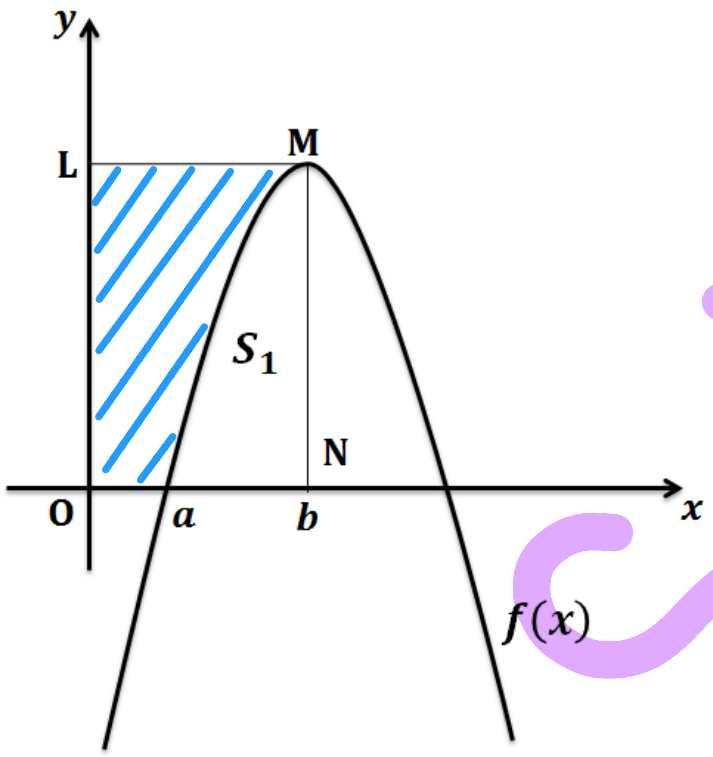


$$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_2 = \int_b^c g(x)\,dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

VEB School
©



$$S_{OLMN\ \text{مستطيل}} = LO \cdot ON$$

$$S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_{\text{مطلوب}} = S_{\text{مستطيل}} - S_1$$

© VEB School