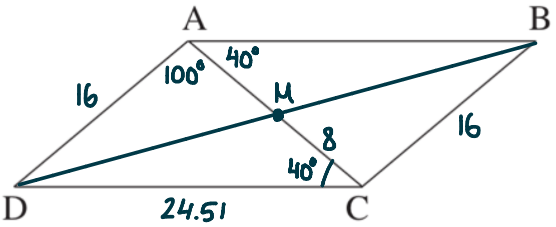
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٦



٦. في متوازي الأضلاع ABCD (انظر الرسم)

معطى أنّ: $AC = AD = 16$ سم

$\sphericalangle BAD = 140^\circ$

أ. (١) احسب طول الضلع DC.

(٢) احسب طول القطر DB.

ب. AE هو الارتفاع على DB في المثلث ABD.

جد طول AE.

أ. * ABCD متوازي الأضلاع لذلك كل زوج اضلاع متقابله متوازية ومتساوية $AD=BC=16$ سم

كل زوج زوايا متقابله متساوية وكل زوج زوايا متجاورة مجموعها 180°

$\Leftarrow$ $\sphericalangle A=\sphericalangle C=140^\circ$

$\sphericalangle B=\sphericalangle D=40^\circ$

* $\triangle ADC$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACD=40^\circ$

مجموع زوايا المثلث 180° $\leftarrow$ $\sphericalangle DAC=100^\circ$, $\sphericalangle CAB=40^\circ$

(1) نظرية cos $\triangle ADC$:

$$DC^2 = AD^2+AC^2-2\cdot AD\cdot AC\cdot \cos(\sphericalangle ADC)$$
$$= 16^2+16^2-2\cdot 16\cdot 16\cdot \cos 100$$

$\leftarrow$ $DC = 24.51$ سم

(2) ABCD متوازي الاضلاع، لذلك اقطاره تنصّف بعضها البعض $AM=MC=8$ سم , $DM=MB$

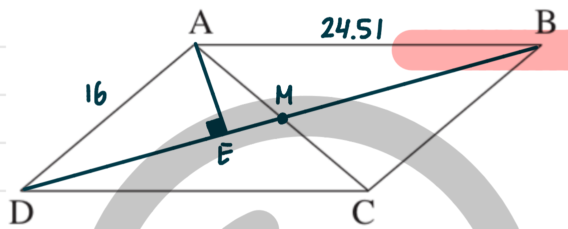
نظرية cos $\triangle DMB$:

$$DM^2 = MC^2+DC^2-2\cdot MC\cdot DC\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$$
$$= 8^2+24.51^2-2\cdot 8\cdot 24.51\cdot \cos 40^\circ$$

$\leftarrow$ $DM = 19.08$ سم

$\downarrow$

$DB = 38.17$ سم



ب. نحسب مساحة $\triangle ADB$ بطريقتين

$$\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot \sin(\sphericalangle A) = \frac{AE\cdot BD}{2}$$

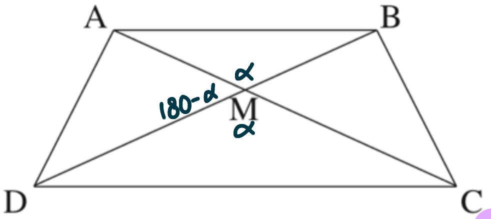
$$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 24.51\cdot \sin 140^\circ = \frac{AE\cdot 38.17}{2}$$

$AE = 6.6$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ - سؤال ٤

٤ . قطرا الشكل الرباعي ABCD يتقاطعان (داخل الشكل الرباعي)

في النقطة M (انظر الرسم).



معطى أنّ: مساحة المثلث ABM هي 5 سم^2،

مساحة المثلث ADM هي 10 سم^2،

مساحة المثلث DCM هي 20 سم^2.

أ. جد النسبة:

(١) $\frac{BM}{MD}$.

(٢) $\frac{AM}{MC}$.

ب. (١) برهن أنّ $\Delta AMB \sim \Delta CMD$.

(٢) برهن أنّ $AB \parallel DC$.

جـ. معطى أيضًا أنّ الشكل الرباعي ABCD هو قابل للحصر داخل دائرة.

برهن أنّ $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

أ. 1. $\frac{S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\cdot \sin\alpha}{S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot DM\cdot \sin(180-\alpha)} = \frac{5}{10} \leftarrow \frac{BM}{DM} = \frac{1}{2}$ $(\sin(180-\alpha) = \sin\alpha)$

2. $\frac{S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot MD\cdot \sin(180-\alpha)}{S_{\Delta DMC} = \frac{1}{2}\cdot DM\cdot MC\cdot \sin\alpha} = \frac{10}{20} \leftarrow \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$

ب. 1. $\Delta AMB \sim \Delta CMD$ حسب: 1. $\alpha = \measuredangle AMB = \measuredangle DMC$

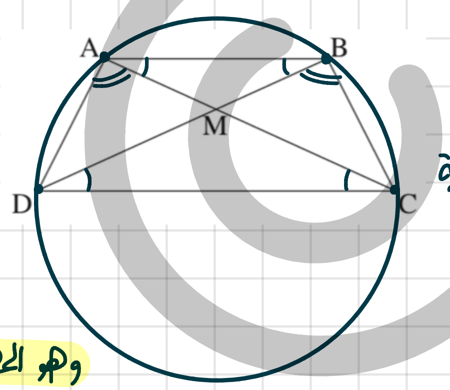
2. نسب بين ضلعين متساوية (من بند أ) $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM} = \frac{1}{2}$ وهو المطلوب

2. من التشابه بالبند السابق ينتج: $\measuredangle ABM = \measuredangle MDC$ ، $\measuredangle BAM = \measuredangle MCD$ ← زوايا متبادلة متساوية ⇐ $AB \parallel DC$

وهو المطلوب

ج. * شكل رباعي به زوج واحد من الاضلاع المتقابلة المتوازية هو شبه منحرف
$AB \parallel DC$ ← ABCD شبه منحرف

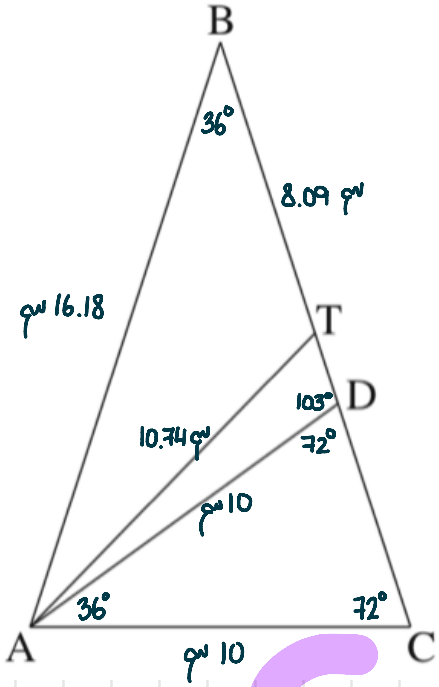
* $AD \leftarrow \measuredangle ACD = \measuredangle ABD$
$BC \leftarrow \measuredangle BAC = \measuredangle BDC$
$DC \leftarrow \measuredangle DAC = \measuredangle DBC$
} زوايا محيطيه تقابل نفس الوتر هي متساوية



* $\Delta ADC \cong \Delta BCD$: ز. $\measuredangle BDC = \measuredangle ACD$
حسب ز.ض.ز ض. ضلع مشترك DC
ز. $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD$

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ - سؤال ٦



٦. في المثلث المتساوي الساقين ABC (BA = BC)

مقدار زاوية القاعدة هو 72°،

وطول القاعدة AC هو 10 سم.

AD ينصّف الزاوية BAC، وَ AT هو مستقيم

متوسّط للساق BC (انظر الرسم).

أ. (١) احسب طول الساق في المثلث ABC.

(٢) احسب طول المستقيم المتوسّط AT.

ب. احسب مقدار الزاوية TAD.

$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = 36°$

* $\triangle ABC$ متساوي الساقين, لذلك زوايا القاعدة متساوية ومجموع زواياه 180° : $\measuredangle A = \measuredangle C = 72°$

$\measuredangle B = 36°$

* $\triangle ADC$ مجموع زواياه 180° : $\measuredangle ADC = 72°$ ← $\triangle ADC$ به زاويتان متساويتان اذاً هو مثلث متساوي ساقين $AD = AC = 10$ سم

أ. (1) نظرية sin $\triangle ABD$

$$\frac{AB}{\sin(\measuredangle BDA)} = \frac{AD}{\sin \measuredangle B} \rightarrow \frac{AB}{\sin 108°} = \frac{10}{\sin 36°} \rightarrow AB = 16.18 \text{ سم}$$

(2) $AT = TC = \frac{1}{2} AB = 8.09$ سم $\leftarrow AB = AC = 16.18$ سم

نظرية cos $\triangle ABT$:

$$AT^2 = AB^2 + BT^2 - 2 \cdot AB \cdot BT \cdot \cos(\measuredangle B)$$
$$= 16.18^2 + 8.09^2 - 2 \cdot 16.18 \cdot 8.09 \cdot \cos 36° \rightarrow AT = 10.74 \text{ سم}$$

ب. طريقة 1

نظرية sin $\triangle ATC$

$$\frac{AT}{\sin \measuredangle C} = \frac{TC}{\sin(\measuredangle TAC)} \rightarrow \frac{10.74}{\sin 72} = \frac{8.09}{\sin(\measuredangle TAC)} \rightarrow \sin(\measuredangle TAC) = 0.716$$

$\measuredangle TAC = 45.75°$

طريقة 2

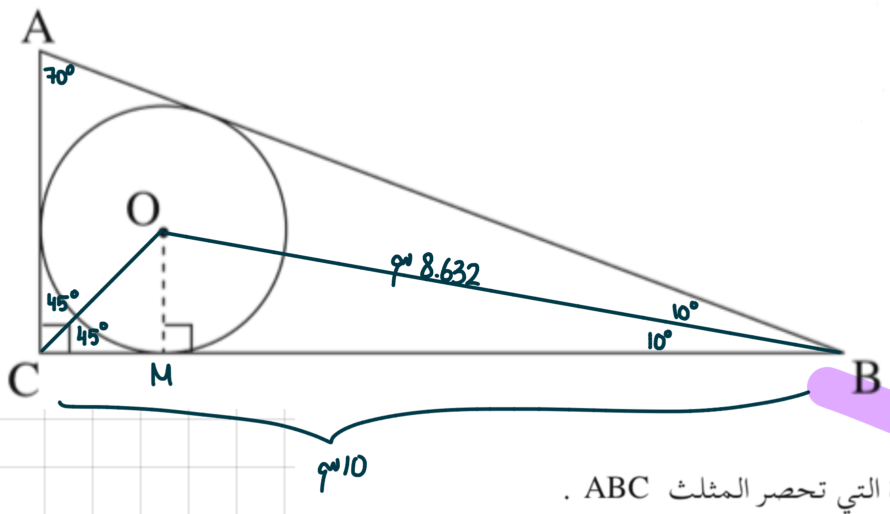
نظرية sin $\triangle ABT$

$$\frac{AT}{\sin(\measuredangle B)} = \frac{BT}{\sin(\measuredangle BAT)} \rightarrow \frac{10.74}{\sin 36°} = \frac{8.09}{\sin(\measuredangle BAT)} \rightarrow \sin(\measuredangle BAT) = 0.442$$

$\measuredangle BAT = 26.27$

من الطريقتين ← $\measuredangle TAD = 9.72°$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٦



٦. دائرة مركزها O ونصف قطرها r محصورة داخل مثلث قائم الزاوية ABC ($\sphericalangle C = 90^o$) (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle CAB = 70^o$

$BC = 10$ سم

أ. (١) جد زوايا المثلث COB .

(٢) جد r .

ب. جد النسبة بين r وبين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث ABC .

أ. (1) اضلاع المثلث ABC تمس الدائرة O . مجموع زوايا المثلث $180^\circ \Leftarrow \sphericalangle B = 20^\circ$.

المماسان الخارجان من نفس النقطة الى الدائرة , متساويان و القطعة الواصله بين مركز الدائرة والنقطة التي يخرج منها مماسان للدائرة , تنصف الزاوية بين المماسين.

$\Leftarrow$

$\sphericalangle ACO = \sphericalangle OCB = 45^\circ$

$\sphericalangle CBO = \sphericalangle ABO = 10^\circ$

مجموع زوايا المثلث ΔCOB 180° : $\sphericalangle COB = 125^\circ$

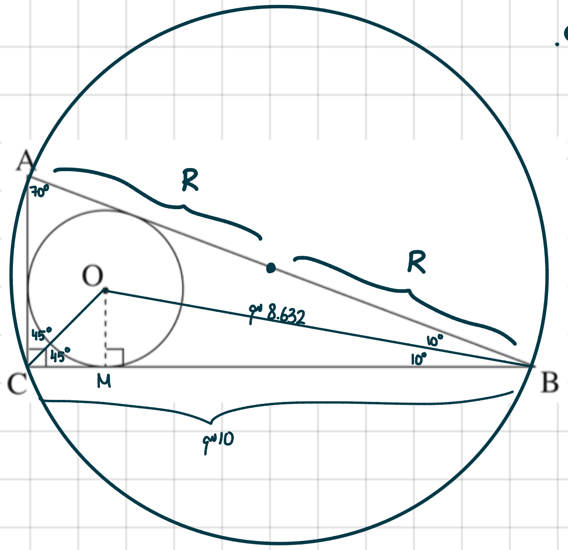
(2) بالمثلث ΔBCO نظرية sin :

$$\frac{CB}{\sin(\sphericalangle COB)} = \frac{BO}{\sin(\sphericalangle OCB)} \leftarrow \frac{10}{\sin 125^\circ} = \frac{BO}{\sin 45^\circ} \leftarrow BO = 8.632 \text{ سم}$$

مثلث ΔOMB قائم الزاوية :

$$\sin(\sphericalangle OBM) = \frac{OM}{OB} \leftarrow \sin 10^\circ = \frac{r}{8.632} \leftarrow r = 1.498 \text{ سم}$$

ب.



* الزاوية المحيطيه القائمه بالدائرة تقابل قطر الدائرة $AB = 2R$

* مثلث قائم ΔABC :

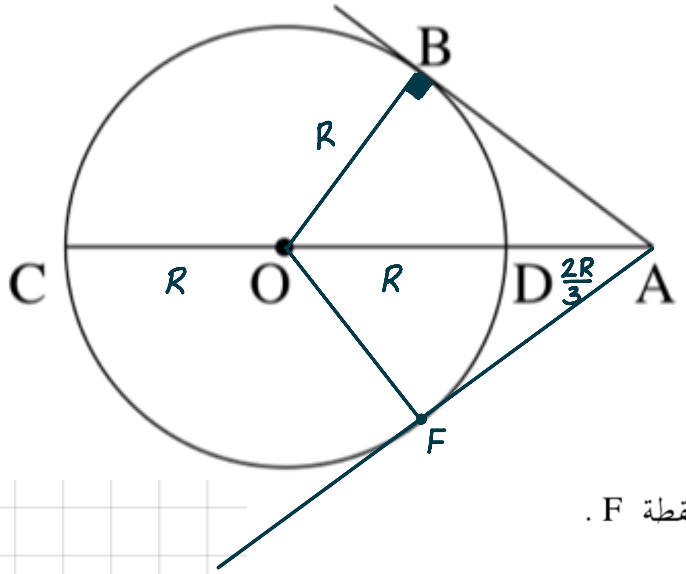
$$\sin(\sphericalangle A) = \frac{CB}{AB} \rightarrow \sin 70^\circ = \frac{10}{2R}$$

$$2R = \frac{10}{\sin 70} \rightarrow R = 5.32 \text{ سم}$$

* النسبة المطلوبه:

$$\frac{r}{R} = \frac{1.498}{5.32} = 0.2815$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١١ - سؤال ٥



٥. معطاة دائرة مركزها O ونصف قطرها R .

يخرج من النقطة A مستقيم يمسّ الدائرة في النقطة B ،

ويخرج مستقيم يقطع الدائرة في النقطتين D وَ C .

CD هو قطر الدائرة (انظر الرسم).

معطى أنّ: $AD = \frac{2R}{3}$.

أ. عبّر عن AB بدلالة R . علّل.

ب. احسب مقدار الزاوية BOA .

جـ. يخرج من النقطة A مستقيم آخر يمسّ الدائرة في النقطة F .

برهن أنّ $BF \perp AO$.

أ. الخط النازل من مركز الدائرة O للماس AB يعامدها في نقطة التماس. $OB \perp BA$

$\triangle OBA$ مثلث قائم، فيثاغورس: $OB^2 + BA^2 = OA^2$

$R^2 + BA^2 = \left(R + \frac{2}{3}R\right)^2$

$BA^2 = \left(\frac{5}{3}R\right)^2 - R^2 = \frac{25}{9}R^2 - R^2 = \frac{16}{9}R^2 \rightarrow \boxed{BA = \frac{4}{3}R}$

ب. $\triangle BOA$ مثلث قائم: $\cos(\measuredangle BOA) = \frac{BO}{OA} \rightarrow \cos(\measuredangle BOA) = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{\measuredangle BOA = 53.13^\circ}$

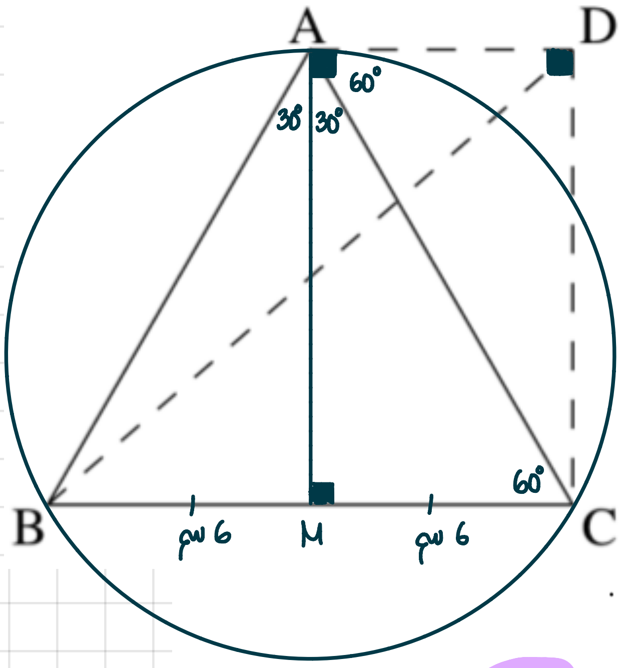
جـ. $BA = AF$ مماسان الخارجان من نفس النقطة إلى الدائرة، متساويان.
$OB = OF = R$ انصاف اقطار

} تشكل رباعي OBAF به زوج اضلاع متجاورة متساوية والضلعان الآخران ايضاً متساوية لذا هو دالتون.

$BF \perp AO$ لان بالدالتون، الاقطار تتعامد بعضها البعض

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١١ - سؤال ٦



٦. المثلث ABC هو مثلث متساوي الأضلاع
$AB=BC=CA$
(انظر الرسم).

نصف قطر الدائرة التي تحصر هذا المثلث هو R.

أ. عبّر بدلالة R :

(١) عن محيط المثلث ABC.

(٢) عن مساحة المثلث ABC.

ب. بنوا على الضلع AC المثلث ADC

بحيث $AD \parallel BC$ و $\measuredangle ADC = 90^\circ$ (انظر الرسم).

معطى أيضًا أنّ $R = 4\sqrt{3}$.

جد طول القطعة BD.

أ. (1) زوايا مثلث الساقين هو $60°$. ΔABC نظرية sin :

$$\frac{AB}{\sin 60°} = 2R \leftarrow \quad AB = 2R \cdot \sin 60° = 1.73 \cdot R$$

(2)
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot (5.196R) \cdot (5.196R) \cdot \sin 60° = 1.299 \cdot R^2$$

ب. * نعد AM ارتفاع ل BC ← بالمثلث متساوي الاضلاع, ارتفاع لاحد اضلاعه يوسّط الضلع وينصّف الزاوية
$BM = MC$, $\measuredangle BAM = \measuredangle MAC$

$BC \parallel AD \rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ACB = 60°$ زوايا متبادله متساوية

* ADCM شكل رباعي به 3 زوايا قائمة, اذاً هو مستطيل ⇐ كل زوج اضلاع متقابله متساوية
$AD = MC$, $AM = DC$

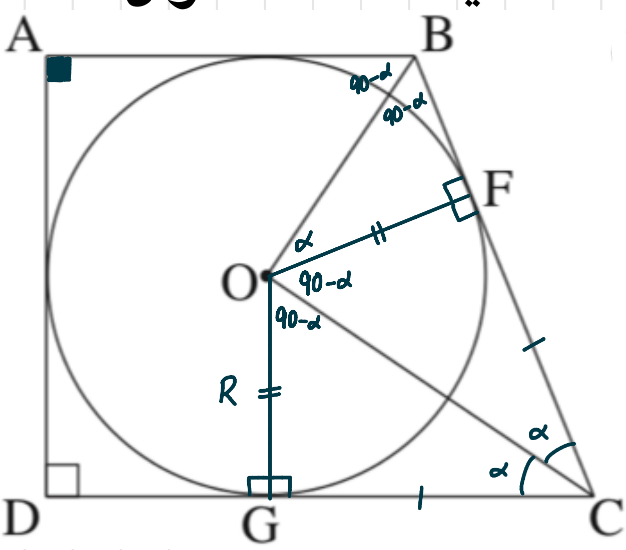
* معطى $R = 4\sqrt{3} \rightarrow AB = BC = AC = 1.73 \cdot 4\sqrt{3} = 12$ سم , $BM = MC = 6$ سم

* مثلث قائم ΔAMC : $\tan(\measuredangle MCA) = \frac{AM}{MC} \rightarrow \tan 60° = \frac{AM}{6} \rightarrow DC = AM = 10.392$ سم

* مثلث قائم ΔBDC : فيتاغورس :
$$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 10.392^2 + 12^2$$

$BD = 15.874$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ - سؤال ٥



٥. في شبه المنحرف القائم الزاوية ABCD ($\sphericalangle ADC = 90^o$)

محصورة دائرة مركزها O .

الضلع DC يمسّ الدائرة في النقطة G .

الضلع BC يمسّ الدائرة في النقطة F

(انظر الرسم).

أ. (١) علّل لماذا OC ينصّف الزاوية BCD.

(٢) برهن أنّ $\sphericalangle BOC = 90^o$.

ب. معطى أنّ : $\frac{OC}{OB} = 2$ ، نصف قطر الدائرة المحصورة هو R .

(١) جد مقدار زوايا شبه المنحرف ABCD .

(٢) عبّر بدلالة R عن طول القطعة OC .

أ. (1) المماسان الخارجان من نفس النقطة C على الدائرة, متساوية , $GC=FC$,
والقطعة الواصله بين مركز الدائرة والنقطة التي يخرج منها مماسات للدائرة, تنصّف الزاوية بين المماسين
⇐ OC ينصّف الزاوية BCD . (ايضاً OB ينصّف الزاوية $\sphericalangle ABC$)

(2) الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها في نقطة التماس $OG \perp DC$, $OF \perp BC$
نفرض $\sphericalangle GCO = \sphericalangle OCF = \alpha$ ← $\sphericalangle B = 180-2\alpha$ مجموع زاويتين متجاورين على نفس الساق بشبه منحرف هو 180°
$\sphericalangle C = 2\alpha$ $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC = 90-\alpha$

مجموع زوايا المثلثات ΔOGC , ΔOFC و ΔOBF هو 180° ← $\left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle GOC = \sphericalangle COF = 90-\alpha \\ \sphericalangle BOF = \alpha \end{array} \right.$ ← $\sphericalangle BOC = 90^\circ$

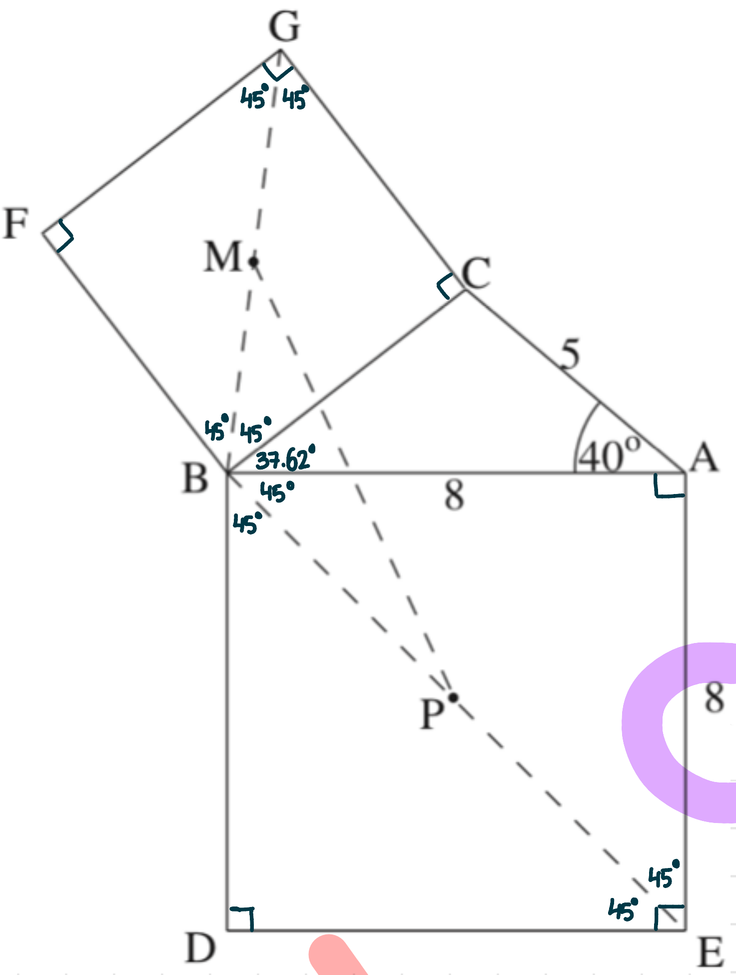
وهو المطلوب

ب. (1) ΔOBC مثلث قائم $\tan(\sphericalangle BCO) = \frac{OC}{OB} = 2$ ← $\sphericalangle BCO = 90-\alpha = 63.43^\circ$
$\alpha = 26.56^\circ$

⇐ زوايا الشبه منحرف هم : $90^\circ , 90^\circ , 2\alpha , 180-2\alpha$
$126.86^\circ , 53.13^\circ , 90^\circ , 90^\circ$

(2) ΔOCG مثلث قائم $\sin(\sphericalangle OCG) = \frac{OG}{OC}$ ← $\sin 26.56 = \frac{R}{OC}$ ← $OC = \frac{R}{\sin 26.56} = 2.236 \cdot R$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ - سؤال ٦



٦. بنوا المربّع BCG على الضلع BC الذي في المثلث ABC
وبنوا المربّع ABDE على الضلع AB الذي في المثلث.
قطرا المربّع BCGF يلتقيان في النقطة M ،
وقطرا المربّع ABDE يلتقيان في النقطة P
(انظر الرسم).
معطى أنّ: $\measuredangle BAC = 40^o$ ،
AB = 8 سم ، AC = 5 سم .

أ. جد مقدار الزاوية CBA .

ب. جد مقدار الزاوية MBP .

جـ. جد أطوال أضلاع المثلث BMP .

$AB = AE = DE = DB = 8$ سم

$BC = CG = FG = FB$

* بالمربع كل الاضلاع والزوايا متساوية واقطاره تتعامد، تنصف وتساوي بحيثها البعض وتنصف زوايا الشكل.

$\measuredangle FBM = \measuredangle GBC = \measuredangle ABE = \measuredangle EBD = 45^\circ$

أ. $\triangle CBA$ نظرية cos : $CB^2 = CA^2 + BA^2 - 2 \cdot CA \cdot BA \cdot \cos(\measuredangle CAB)$
$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ$ $\leftarrow$ $CB = 5.264$ سم

$\triangle CBA$ نظرية sin : $\frac{CB}{\sin(\measuredangle CAB)} = \frac{CA}{\sin(\measuredangle CBA)}$ $\leftarrow$ $\frac{5.264}{\sin 40} = \frac{5}{\sin(\measuredangle CBA)}$ $\leftarrow$ $\sin(\measuredangle CBA) = 0.61$

$\measuredangle CBA = 37.62^\circ$

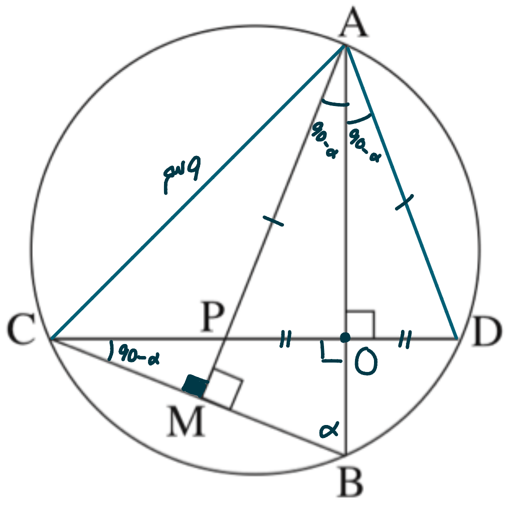
ب. $\measuredangle MBP = 45^\circ + 37.62^\circ + 45^\circ$
$= 127.62^\circ$

ج. $\triangle ABE$ مثلث قائم، فيثاغورس : $BE^2 = AB^2 + AE^2$
$= 8^2 + 8^2$ $\leftarrow$ $BE = 11.31$ سم $\leftarrow$ $BP = \frac{1}{2} BE = 5.65$ سم

$\triangle GBC$ مثلث قائم، فيثاغورس : $BG^2 = GC^2 + BC^2$
$= 5.264^2 + 5.264^2$ $\leftarrow$ $BG = 7.44$ سم $\leftarrow$ $BM = \frac{1}{2} BG = 3.722$ سم

$\triangle BMP$ نظرية cos : $MP^2 = BM^2 + BP^2 - 2 \cdot BM \cdot BP \cdot \cos(\measuredangle MBP)$
$= 3.722^2 + 5.65^2 - 2 \cdot 3.722 \cdot 5.65 \cdot \cos(127.62^\circ)$
$= 71.44$ $\leftarrow$ $MP = 8.452$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٥



٥. النقاط A ، B ، C ، D موجودة على محيط دائرة.

M هي نقطة على CB .

AM يقطع CD في النقطة P (انظر الرسم).

معطى أنّ: $AB \perp CD$

$AM \perp CB$

أ. برهن أنّ $\sphericalangle DCB = \sphericalangle MAB$.

ب. برهن أنّ المثلث APD متساوي الساقين.

جـ. معطى أيضًا أنّ AC = 9 سم وأنّ نصف قطر الدائرة هو 5 سم.

جد مقدار زوايا المثلث PCM .

أ. نفرض: $\sphericalangle ABC=\alpha$ ، ΔAMB ، ΔCOB مجموع زوايا المثلث $180°$ $\Leftarrow$ $\sphericalangle OCB=\sphericalangle MAB=90°-\alpha$

وهو المطلوب

ب. نجد AD . $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD = 90°-\alpha$ زوايا محيطية تقابل نفس القوس $\overset{\frown}{BD}$ متساوية.

ΔAPD مثلث به AO ارتفاع ومنصف زاوية ← هو متساوي الساقين

$(\sphericalangle PAO=\sphericalangle OAD)$ $(AO \perp PD)$

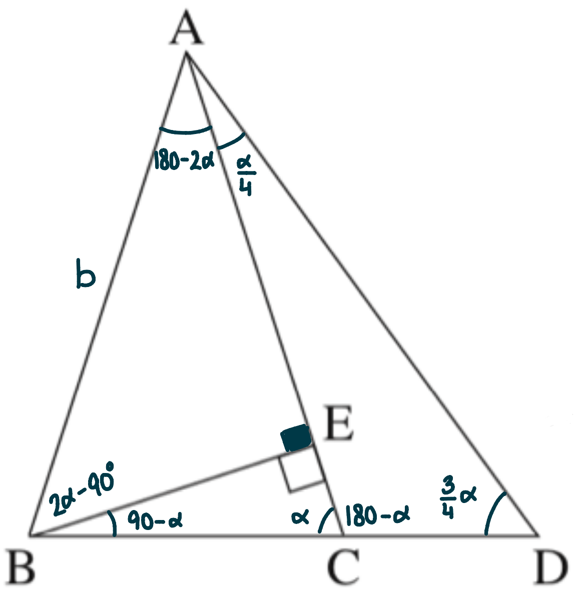
وهو المطلوب

ج. نظرية sin ΔACD : $\frac{AD}{\sin(\sphericalangle ADC)} = 2R$ ← $\frac{9}{\sin(\sphericalangle ADC)} = 2\cdot 5$ ← $\sin(\sphericalangle ADC)= 0.9$
$\sphericalangle ADC= 64.158°$

ΔPCM مجموع زوايا المثلث $180°$ ← $\sphericalangle OAD= 25.841°$ $\Leftarrow$ $\sphericalangle PCM= 25.841°$

$\Leftarrow$ زوايا المثلث PCM : $25.841°, 64.158°, 90°$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١١ موعد ب - سؤال ٦



٦. في المثلث المتساوي الساقين ABC ($AB = AC$)
زاوية القاعدة هي α ، وطول الساق AC هو b .
النقطة D موجودة على امتداد القاعدة BC
بحيث $\measuredangle CAD = \frac{\alpha}{4}$.
BE هو الارتفاع على الساق في المثلث ABC (انظر الرسم).

أ. عبّر بدلالة α عن النسبة $\frac{AD}{BE}$.

ب. بيّن أنّ $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABE}} = -\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\alpha\cos2\alpha}$.

$S_{\Delta ACD}$ هي مساحة المثلث ACD . $S_{\Delta ABE}$ هي مساحة المثلث ABE .

أ. - ΔABC متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساويه
- مجموع زوايا كل مثلث $180°$
- الزاوية المستقيمة $180°$

$\Leftarrow$ (الزوايا في الرسم)

$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$

* $\underline{\Delta BAE}$ $\quad \sin(180-2\alpha) = \frac{BE}{b} \quad \rightarrow \quad BE = b\cdot\sin(180-2\alpha) = b\cdot\sin2\alpha$

* $\underline{\sin \text{ نظرية } \Delta ACD}$ $\quad \frac{AD}{\sin(180-\alpha)} = \frac{b}{\sin(\frac{3}{4}\alpha)} \quad \rightarrow \quad AD = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin(\frac{3}{4}\alpha)}$

$\Leftarrow$

$$\frac{AD}{BE} = \frac{\left(\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin(\frac{3}{4}\alpha)}\right)}{b\cdot\sin2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{3}{4}\alpha)\cdot\sin2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{3}{4}\alpha)\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{2\cdot\sin(\frac{3}{4}\alpha)\cdot\cos\alpha}$$

ب.

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\measuredangle CAD}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE\cdot\sin\measuredangle ABE} = \overbrace{\frac{AD}{BE}}^{\text{بند أ}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin(2\alpha-90)} = \frac{1}{2\cdot\sin(\frac{3}{4}\alpha)\cdot\cos\alpha}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin(2\alpha-90)}}$$

$\sin(2\alpha-90) = -\cos2\alpha$

$$= \frac{-\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sin(\frac{3\alpha}{4})\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\alpha}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٢ - سؤال ٦

٦. في المثلث المتساوي الأضلاع ABC محصور المثلث المتساوي الأضلاع DEF (انظر الرسم).

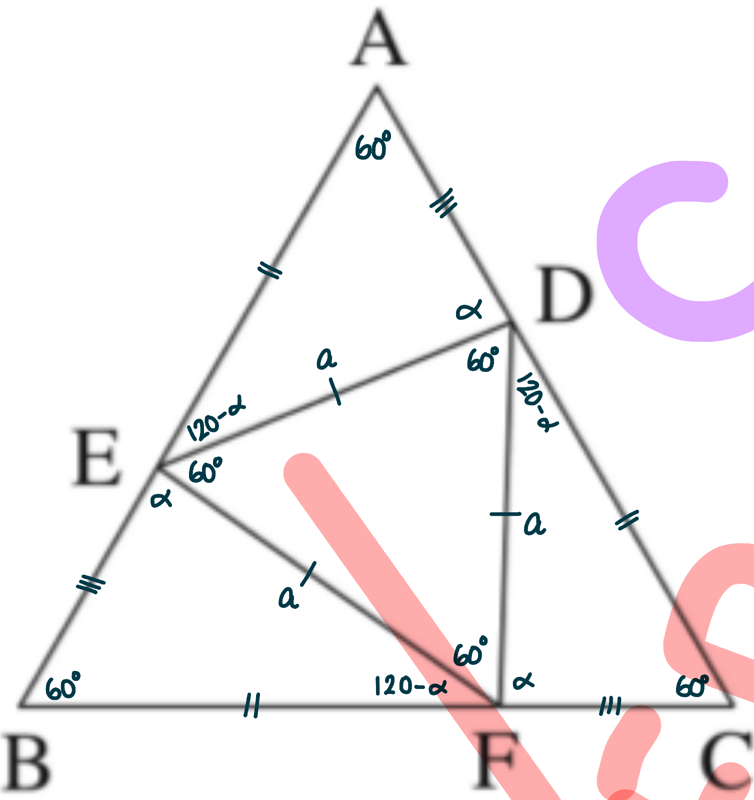
* مثلث متساوي الاضلاع كل اضلاعه وزواياه متساوية ($60°$).

معطى أنّ: $\measuredangle ADE = \alpha$, $DE = a$.

أ. عبّر بدلالة α حسب الحاجة عن زوايا المثلث BEF .

ب. عبّر بدلالة a وَ α عن طول BC .

جـ. إذا كان DE∥BC ، ونصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث DEF هو 4 سم، جد طول الضلع BC .



أ. $\measuredangle FDC = 120° - \alpha$ ($\measuredangle D$ زاوية مستقيمة)

$\measuredangle DFC = \alpha$ (مجموع زوايا المثلث ΔDFC هو $180°$)

$\measuredangle EFB = 120° - \alpha$ ($\measuredangle F$ زاوية مستقيمة)

$\measuredangle BEF = \alpha$ (مجموع زوايا المثلث ΔBEF هو $180°$)

زوايا المثلث ΔBEF : $\alpha°, 60°, 120° - \alpha$

ب. $\Delta DAE \cong \Delta FCD \cong \Delta EBF$

حسب ز.ض.ز

(زواياهم متساوية و - $ED = DF = EF$)

نظرية sin ΔEFB :

$$\frac{EB}{\sin(\measuredangle EFB)} = \frac{BF}{\sin(\measuredangle BEF)} = \frac{EF}{\sin(\measuredangle B)}$$

$$\frac{EB}{\sin(120-\alpha)} = \frac{BF}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin 60°} \leftarrow$$

$$EB = a \cdot \frac{\sin(120-\alpha)}{\sin 60°}$$

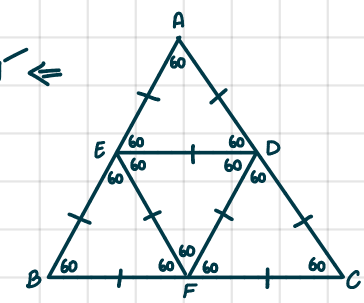
$$BF = a \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 60°}$$

$$\Rightarrow BC = BF + FC = BF + EB = a \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 60°} + a \cdot \frac{\sin(120-\alpha)}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 60°}(\sin\alpha + \sin(120-\alpha))$$

ج. نظرية sin ΔDEF :

$$\frac{DF}{\sin(\measuredangle DEF)} = 2R \rightarrow \frac{a}{\sin 60°} = 2 \cdot 4 \rightarrow a = 6.928 \text{ سم}$$

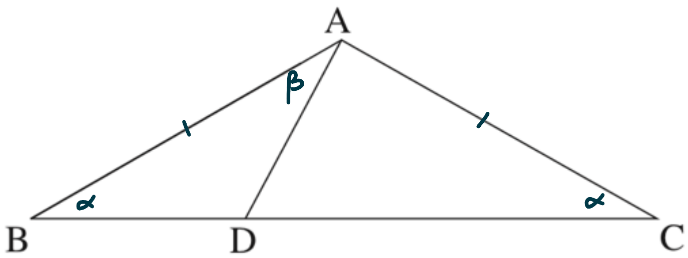
لأنّ DE∥BC ينتج زوايا متبادلة متساوية وزوايا متناظرة متساوية. (وكل زاوية مقدارها $60°$)



كل المثلثات في الرسم متساوي الاضلاع. $\Leftarrow$

$$BC = 2a = 2 \cdot 6.982 = 13.964 \text{ سم}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٦



.6 معطى المثلث المتساوي الساقين ABC ،
الذي فيه $AB = AC$ وَ $\sphericalangle ABC = \alpha$.
D هي نقطة على القاعدة BC
بحيث $\sphericalangle BAD = \beta$.

أ. عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة بين مساحة المثلث ABD ومساحة المثلث ACD .

ب. معطى أيضًا أنّ: $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ، $\beta = 30^\circ$.
جد α .

أ. * ΔABC متساوي الساقين, لذلك زوايا القاعدة متساوية $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$
ومجموع زوايا 180° ← $\sphericalangle A = 180 - 2\alpha$

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AB} \cdot \cancel{AD} \cdot \sin\beta}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AD} \cdot \cancel{AC} \cdot \sin(180-2\alpha-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(180-2\alpha-\beta)} = \boxed{\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}$$

$(\sin(180-\alpha) = \sin\alpha)$

ب. نحسب نسبة المساحات من بند أ بطريقة ثانية:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AB} \cdot BD \cdot \cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AC} \cdot DC \cdot \cancel{\sin\alpha}} = \frac{BD}{DC} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{معطى}}$$

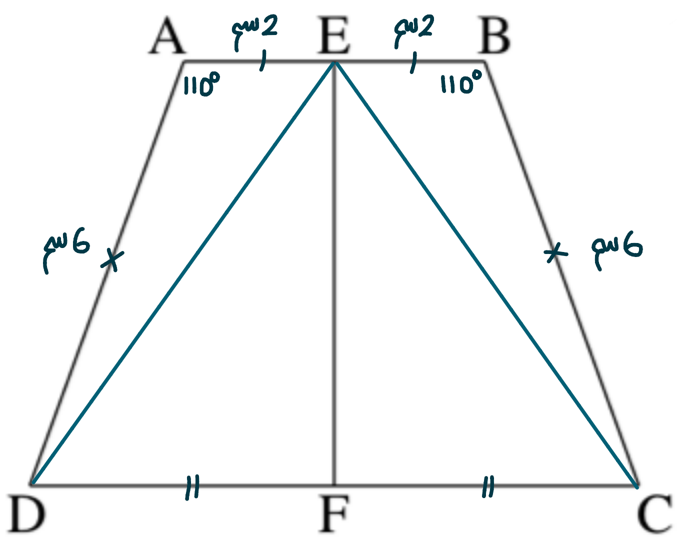
$$\Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}_{\text{بند أ}}$$

نعوّض $\beta = 30^\circ$:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(2\alpha + 30^\circ)}$$

$$\sin(2\alpha+30) = 2 \cdot \sin 30^\circ$$
$$\sin(2\alpha+30) = 1$$
$$2\alpha + 30 = \text{shift}\sin(1)$$
$$2\alpha + 30 = 90$$
$$2\alpha = 60$$
$$\boxed{\alpha = 30^\circ}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٥



5. معطى شبه منحرف متساوي الساقين ABCD ‏(AB ∥ DC) .
النقطتان E وَ F هما منتصفا القاعدتين AB وَ DC
بالتلاؤم (انظر الرسم) .

أ . (1) برهن أنّ ED = EC .
(2) برهن أنّ EF ⊥ DC .

ب . معطى أنّ: AB = 4 سم
BC = 6 سم
∢EBC = 110°
جد مقدار الزاوية ECB .

أ. (1) ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AD=BC) لذلك زوايا كل قاعدة متساوية $\measuredangle A = \measuredangle B$

$\triangle DAE \cong \triangle CBE$ حسب ض.ز.ض
ض $AE = EB$ معطى
ز $\measuredangle A = \measuredangle B$
ض $AD = BC$

$\Leftarrow$ $ED = EC$ وهو المطلوب

(2) $\triangle EDC$ من البند السابق مثلث متساوي الساقين.
EF متوسط للقاعدة في مثلث متساوي الساقين لذلك هو ايضًا ارتفاع على القاعدة ومنصّف زاوية الرأس.

$\Leftarrow$ $EF \perp DC$ وهو المطلوب

ب. $\triangle EBC$ نظرية cos : $EC^2 = EB^2 + BC^2 - 2\cdot EB\cdot BC\cdot \cos(\measuredangle EBC)$

$= 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot \cos 110°$

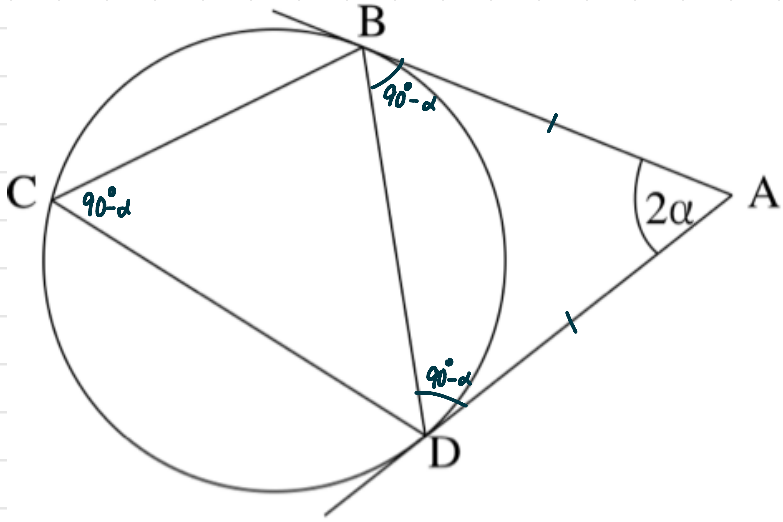
$\downarrow$

$EC = 6.943$ سم

$\triangle EBC$ نظرية sin : $\frac{EC}{\sin(\measuredangle EBC)} = \frac{EB}{\sin(\measuredangle ECB)}$ $\Leftarrow$ $\frac{6.943}{\sin 110°} = \frac{2}{\sin(\measuredangle ECB)}$

$\Leftarrow$ $\measuredangle ECB = 15.705°$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٦



6. مرّروا من النقطة A مماسين لدائرة معيّنة، AB وَ AD .
النقطة C تقع على محيط الدائرة خارج
المثلث ABD (انظر الرسم).
معطى أنّ : نصف قطر الدائرة هو 10 سم
$\sphericalangle BAD = 2\alpha$

أ. (1) برهن أنّ $\sphericalangle BCD = 90^o - \alpha$.

(2) عبّر بدلالة α عن طول AB .

ب. إذا كان معطى أيضًا أنّ $\alpha = 30^o$ وَ $\sphericalangle CBD = 70^o$ ،
احسب طول AC .

أ. (1) مماسان خارجان من نقطة واحدة لنفس الدائرة هم متساويان $(AB = AD)$

$\Leftarrow$ $\triangle ABD$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية
مجموع زوايا المثلث $180°$ $\quad$ $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDA = 90° - \alpha$

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD = 90° - \alpha$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر (BD) يساوي الزاوية المحيطية المقابله للوتر
وهو المطلوب

(2) $\triangle BCD$ نظرية sin :

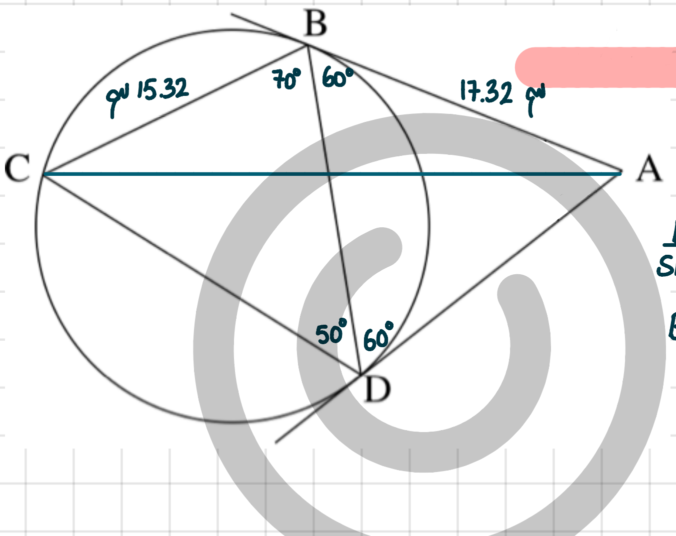
$$\frac{BD}{\sin \sphericalangle C} = 2R \rightarrow \frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = 2 \cdot 10 \rightarrow BD = 20 \cdot \sin(90-\alpha)$$

$\triangle ABD$ نظرية sin :

$$\frac{BD}{\sin(\sphericalangle A)} = \frac{AB}{\sin(\sphericalangle BDA)} \rightarrow \frac{20\sin(90-\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$$

$$AB = \frac{20 \cdot (\sin(90-\alpha))^2}{\sin 2\alpha} = \frac{20 \cdot (\cos\alpha)^2}{\sin 2\alpha}$$

$[\sin(90-\alpha) = \cos\alpha]^*$



ب. من المعطيات :

$$AB = \frac{20 \cdot (\cos(30°))^2}{\sin(60°)} = 17.32 \text{ سم}$$

مجموع زوايا المثلث $\triangle BCD$ $180° \rightarrow \sphericalangle CDB = 50°$

$\triangle BCD$ نظرية sin :

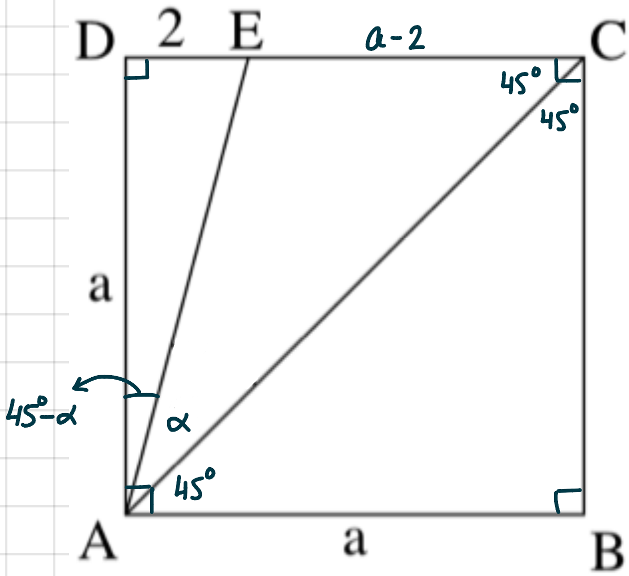
$$\frac{BC}{\sin(\sphericalangle BDC)} = 2R \rightarrow \frac{BC}{\sin 50°} = 2 \cdot 10$$

$BC = 15.32$ سم

$\triangle ABC$ نظرية cos :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \cdot BC \cdot BA \cdot \cos(\sphericalangle CBA)$$
$$= 15.32^2 + 17.32^2 - 2 \cdot 15.32 \cdot 17.32 \cdot \cos 130°$$

$\Leftarrow$ $AC = 29.59$ سم



5. معطى المربّع ABCD الذي طول ضلعه a سم.

النقطة E موجودة على الضلع DC (انظر الرسم).

معطى أنّ : DE = 2 سم ، $\sphericalangle EAC = \alpha$.

أ. عبّر عن a بدلالة α .

ب. إذا كان معطى أنّ $\alpha = 30^o$، احسب مساحة المثلث ACE .

جـ. احسب α في الحالة التي فيها DE = EC = 2 سم .

أ. * ABCD مربّع اذاً كل اضلاعه وزواياه متساوية . الاقطارة تنصّف زوايا الشكل .

$\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DCA = 45^\circ$

$\Leftarrow \sphericalangle DAE = 45-\alpha^\circ$

* ΔADE $\tan(45-\alpha) = \frac{2}{a}$ $\rightarrow$ $a = \frac{2}{\tan(45-\alpha)}$

ب. $S_{\Delta AEC} = \frac{EC \cdot DA}{2} = \frac{(a-2)\cdot a}{2} = 0.5a^2 - a$

نعوّض $\alpha = 30^\circ$ لإيجاد a : $a = \frac{2}{\tan(45-30)} = 7.46$

$\leftarrow$ $S_{\Delta AEC} = 0.5\cdot(7.46)^2 - 7.46$

$= 20.365$ سم²

ج. عندما $DE = EC = 2$ $\leftarrow$ $DC = 4 = a$ $\Leftarrow$ من بند أ :

$4 = \frac{2}{\tan(45-\alpha)}$

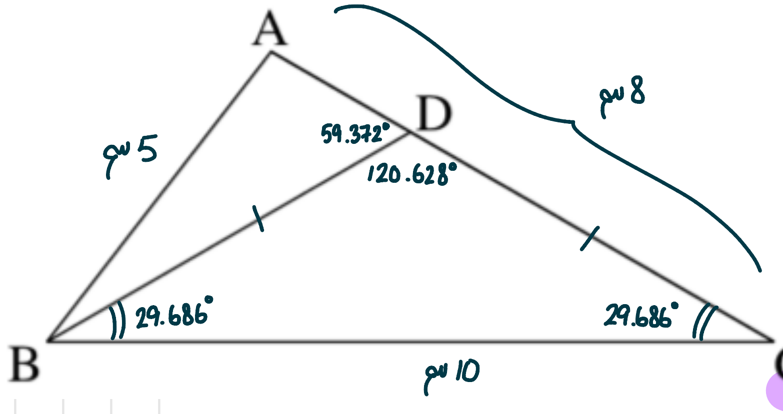
$4\cdot\tan(45-\alpha) = 2 \quad \backslash :4$

$\tan(45-\alpha) = 0.5$

$45-\alpha = 26.56$

$\alpha = 18.43^\circ$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٣ - سؤال ٦



6. في المثلث ABC معطى أنّ: AB = 5 سم

AC = 8 سم

BC = 10 سم

النقطة D موجودة على الضلع AC

بحيث BD = DC (انظر الرسم).

أ. احسب زوايا المثلث BDC.

ب. جد النسبة بين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث ABD

وبين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث BDC.

أ. نظرية cos $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot \cos(\measuredangle ACB)$$
$$5^2 = 8^2 + 10^2 - 2\cdot 8\cdot 10\cdot \cos(\measuredangle ACB)$$
$$\cos(\measuredangle ACB) = 0.86875$$
$$\measuredangle ACB = 29.686°$$

$\triangle BDC$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB = 29.686°$

مجموع زوايا $180°$ ← $\measuredangle BDC = 120.628°$

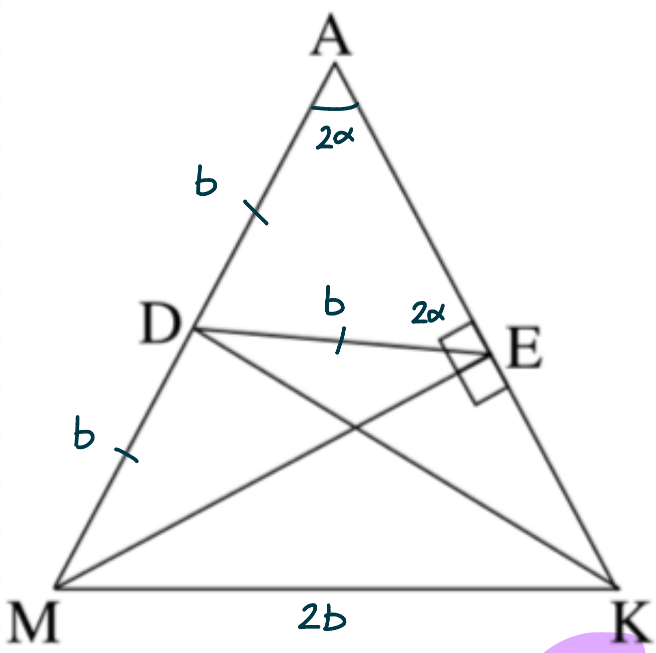
ب. نظرية sin $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin(\measuredangle ADB)} = 2R \leftarrow \frac{5}{\sin(59.372)} = 2R \leftarrow R_{\triangle ABD} = 2.9053 \text{ سم}$$

نظرية sin $\triangle BDC$:

$$\frac{BC}{\sin(\measuredangle BDC)} = 2R \leftarrow \frac{10}{\sin(120.628)} = 2R \leftarrow R_{\triangle BDC} = 5.8106 \text{ سم}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{R_{\triangle ABD}}{R_{\triangle BDC}} = \frac{2.9053}{5.8106} = \frac{1}{2}$$



5. في المثلّث المتساوي الساقين AMK $(AM = AK)$

KD هو مستقيم متوسّط للساق AM ،

وَ ME هو ارتفاع على الساق AK (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$.

معطى أنّ: $\sphericalangle MAK = 2\alpha$ ، $AM = 2b$.

ب. عبّر بدلالة b وَ α عن مساحة المثلّث ADE .

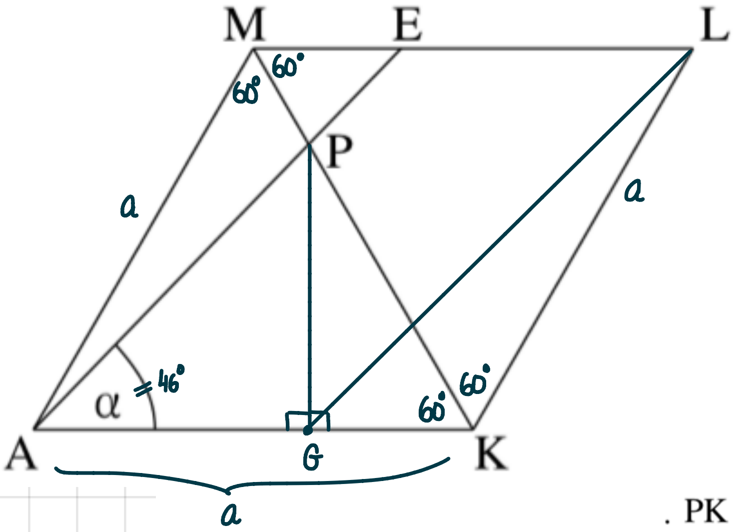
جـ. إذا كان معطى أيضًا أنّ $MK = 2 \cdot DE$:

(1) احسب α .

(2) برهن أنّ $DE \parallel MK$.

	إدعاء	شرح
أ. (1)	$DE = AD = DM$	ΔAME مثلث قائم، المتوسط للوتر يساوي نصفه $\leftarrow DE = \frac{1}{2}AM$
(2)	$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$	من ادعاء 1 ينتج ان ΔADE مثلث متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية. وهو المطلوب
ب. (3)	$\sphericalangle ADE = 180 - 4\alpha$	مجموع زوايا المثلث ΔADE هو 180°
(4)	$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}b^2 \sin 4\alpha$	- نظرية sin لمساحة ΔADE: $S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin(\sphericalangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin(180 - 4\alpha)$ - $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$ وهو المطلوب
ج.1 (5)	ΔMAK متساوي الاضلاع	معطى $AM = AK$ + $AM = MK = 2b$ $\leftarrow AM = MK = KA$
(6)	$\alpha = 30^\circ$	زوايا مثلث متساوي الاضلاع هو $60^\circ \Leftarrow 2\alpha = 60^\circ$ وهو المطلوب
ج.2 (7)	$DE \parallel MK$	$\sphericalangle AED = \sphericalangle K = 60^\circ$ زوايا متناظرة متساوية وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٣ - سؤال ٦



6. معطى المعيَّن AMLK .
النقطة E موجودة على الضلع ML .
القطر KM يقطع القطعة AE
في النقطة P (انظر الرسم).
معطى أنّ: $\sphericalangle AML = 120^{o}$ ، $\sphericalangle EAK = \alpha$ ،
طول ضلع المعيَّن هو a .

א. (1) جد مقدار الزاوية PKA . علّل.
(2) عبّر بدلالة a وَ α عن طول القطعة PK .

ب. عبر النقطة P مرّروا عمودًا على الضلع AK . العمود يقطع AK في النقطة G .
معطى أيضًا أنّ $\alpha = 46^{o}$.
عبّر بدلالة a عن طول القطعة GL .

أ. 1. AMLK معين ، كل اضلاعه متساويه، كل زوج زوايا متقابله متساويه $120° = \sphericalangle M = \sphericalangle L$
كل زوج زوايا متجاورة مجموعها $180°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle L = 60°$
اقطارها تنصّف زوايا الشكل $60° = \sphericalangle AMK = \sphericalangle KML = \sphericalangle MKL = \sphericalangle MKA$

$\Leftarrow \sphericalangle PKA = 60°$

2. ΔAMK مثلث متساوي الاضلاع لان كل زواياه متساوية (مقدارها $60°$) $\leftarrow MK = a$

ΔAPK مجموع زوايا المثلث $180°$ $\leftarrow \sphericalangle AFK = 120° - \alpha$

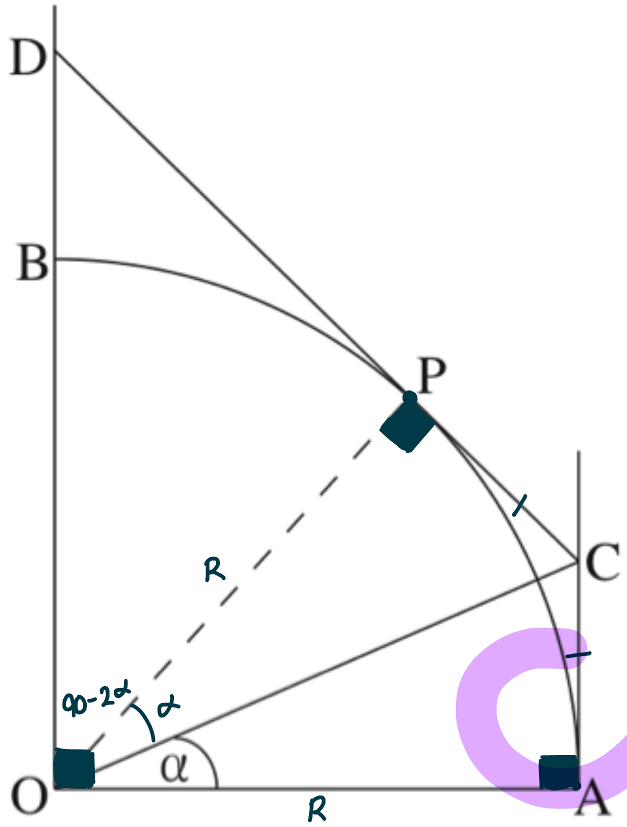
نظرية sin بالمثلث ΔAPK : $\frac{AK}{\sin(\sphericalangle APK)} = \frac{PK}{\sin(\sphericalangle PAK)} \leftarrow \frac{PK}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(120-\alpha)}$

$\leftarrow PK = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(120-\alpha)}$

ب. * $PK = \frac{a \cdot \sin 46}{\sin(120-46)} = a \cdot 0.748$

* ΔPGK $\cos(\sphericalangle PKG) = \frac{GK}{PK} \leftarrow \cos 60° = \frac{GK}{0.748 a} \leftarrow GK = \cos 60° \cdot 0.748 \cdot a$
$GK = 0.374 \cdot a$

* نظرية cos بالمثلث ΔGKL : $GL^2 = GK^2 + KL^2 - 2 \cdot GK \cdot KL \cdot \cos(\sphericalangle K)$
$= (0.374 \cdot a)^2 + a^2 - 2 \cdot (0.374 a) \cdot a \cdot \underbrace{\cos 120°}_{-0.5}$
$= 0.139 a^2 + a^2 + 0.374 a^2$
$GL^2 = 1.513 a^2 \quad \sqrt{\ }$
$GL = 1.23 a$



6. معطى ربع دائرة OAB نصف قطره R . $\measuredangle BOA = 90°$

مرّروا مستقيمًا يمسّ ربع الدائرة في النقطة P ،

ومرّروا مستقيمًا يمسّ ربع الدائرة في النقطة A .

يلتقي المماسّان في النقطة C .

المماسّ في النقطة P يقطع امتداد OB في النقطة D

(انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\measuredangle COA = \alpha$.

أ. برهن أنّ $AC \parallel OD$.

ب. عبّر بدلالة R وَ α عن مساحة الشكل الرباعيّ ACDO .

جـ. معطى أنّ مساحة المثلّث OPD هي $\frac{R^2}{2}$.
احسب α .

أ. الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها في نقطة التماس ⇐ $OA \perp AC$, $OP \perp DC$

$\measuredangle BOA + \measuredangle CAO = 180°$ ⇐ زوايا متجاورة مجموعها 180° ⇐ $AC \parallel OD$ وهو المطلوب

ب. * ACDO شبه منحرف لانه شكل رباعي به زوج واحد فقط من الاضلاع المتقابلة المتوازية . ($AC \parallel OD$)

* $\triangle OPC \cong \triangle OAC$ حسب ض.ض.ز . الضلع الاكبر بالمثلث . CO مشترك
الزاوية الكبرى بالمثلث . $\measuredangle OPC = \measuredangle OAC = 90°$
ض . $PC = CA$ (مماسان خارجان من نفس النقطة للدائرة , متساويان)

$\Leftarrow \measuredangle POC = \measuredangle COA = \alpha°$
$\Leftarrow \measuredangle POD = 90° - 2\alpha$

* مثلث $\triangle OCA$ قائم : $\tan(\measuredangle COA) = \frac{CA}{OA}$ ← $\tan\alpha = \frac{CA}{R}$ ← $CA = R \cdot \tan\alpha$

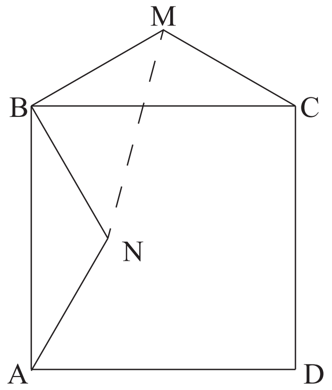
* مثلث $\triangle DPO$ قائم : $\tan(\measuredangle DOP) = \frac{DP}{OP}$ ← $\tan(90-2\alpha) = \frac{DP}{R}$ ← $DP = R \cdot \tan(90-2\alpha)$

$$\Rightarrow S_{ACDO} = \frac{(CA+DO) \cdot AO}{2} = \frac{(R\tan\alpha + R\tan(90-2\alpha))R}{2} = \frac{R^2}{2}(\tan\alpha + \tan(90-2\alpha))$$

ج. $S_{\triangle OPD} = \frac{DP \cdot PO}{2} = \frac{\cancel{R} \cdot \tan(90-2\alpha) \cdot \cancel{R}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}$

$\tan(90-2\alpha) = 1$
$90 - 2\alpha = 45$ ← $\alpha = 22.5°$

السؤال 5



معطى المثلّث المتساوي الساقين MBC ‏(MB = MC) .

على القاعدة BC بنوا المربّع ABCD .

N هي نقطة داخل المربّع

بحيث $\Delta NBA \cong \Delta MBC$ بالتلاؤم

(انظر الرسم).

أ. برهن أنّ $\sphericalangle MBN = 90^o$.

ب. برهن أنّ $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BNM$.

جـ. معطى أيضًا أنّ: MN = 16 سم ، $\sphericalangle BMC = 120^o$.

احسب طول ضلع المربّع ABCD .

إجابة السؤال 5

أ. حسب المعطى: $\Delta NBA \cong \Delta MBC$ بالتلاؤم

$\Downarrow$

$\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABN$

$\sphericalangle ABC = 90^o$ زاوية في مربّع

$\Downarrow$

$\sphericalangle CBN = 90^o - \sphericalangle ABN = 90^o - \sphericalangle MBC$

$\sphericalangle MBN = \sphericalangle MBC + \sphericalangle CBN$

$\Downarrow$

$\sphericalangle MBN = \sphericalangle MBC + 90^o - \sphericalangle MBC = 90^o$

ب. $BM = BN$ لأنّ $\Delta NBA \cong \Delta MBC$ بالتلاؤم

$\Downarrow$

$\sphericalangle BMN = \sphericalangle BNM$ مقابل الأضلاع المتساوية في المثلّث توجد زوايا متساوية

/يتبع في صفحة 9/

تكملة إجابة السؤال 5.

جـ. وجدنا أنّ $\triangle MBN$ هو قائم الزاوية ومتساوي الساقين،

لذلك حسب نظريّة فيثاغورس يتحقّق:

$$MN^2 = 2 \cdot BM^2$$
$$\Downarrow$$
$$16^2 = 2 \cdot BM^2$$
$$\Downarrow$$
$$BM = 8\sqrt{2}$$

في المثلّث المتساوي الساقين MBC يتحقّق:

$$\sin\left(\frac{\sphericalangle BMC}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$$
$$\Downarrow$$
$$\sin\frac{120^o}{2} = \frac{\frac{1}{2}BC}{8\sqrt{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$BC = 8\sqrt{6}$$ سم

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 6

معطى المثلّث ABC .

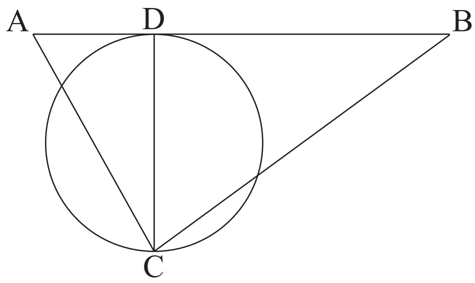
دائرة قطرها CD تمسّ الضلع AB

في النقطة D (انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\sphericalangle BAC = \alpha$

$\sphericalangle ABC = \beta$

نصف قطر الدائرة هو R .



أ. عبّر بدلالة R وَ α وَ β عن طول الضلع AB .

ب. جد $\sphericalangle ACB$ ، إذا كان $\beta = \alpha$ ومساحة المثلّث ABC هي $4R^2$.

إجابة السؤال 6

أ. $CD \perp AB$ مماسّ معامد لنصف القطر في نقطة التماسّ

$\Downarrow$

في المثلّث القائم الزاوية ADC يتحقّق: $\frac{2R}{AD} = tg\alpha$

$\Downarrow$

$AD = \frac{2R}{tg\alpha}$

في المثلّث القائم الزاوية BDC يتحقّق: $\frac{2R}{BD} = tg\beta$

$\Downarrow$

$BD = \frac{2R}{tg\beta}$

$AB = AD + BD$

$\Downarrow$

$AB = \frac{2R}{tg\alpha} + \frac{2R}{tg\beta} = 2R\left(\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\beta}\right)$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب. مساحة المثلّث ABC هي:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R\left(\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\alpha}\right) = 2R^2\left(\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\beta}\right)$$

حسب المعطى: $S_{\triangle ABC} = 4R^2 \quad , \quad \alpha = \beta$

لذلك: $4R^2 = 2R^2\left(\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\alpha}\right)$

$$\Downarrow$$

$$tg\alpha = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 45^o$$

إذا كان $\alpha = \beta$ عندها: $\measuredangle ACB = 180^o - 2\alpha$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ACB = 90^o$$

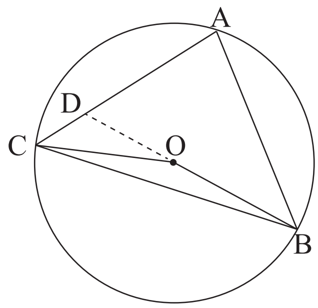
/ يتبع في صفحة 12 /

السؤال 5

ABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AC = AB)$ ،

محصور في دائرة مركزها O ونصف قطرها R (انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\sphericalangle BAC = 80^o$.



أ. عبّر بدلالة R عن طول الضلع AB .

ب. جِد $\sphericalangle COB$. علّل.

جـ. امتداد OB يقطع الساق AC في النقطة D (انظر الرسم) .

معطى أنّ : BD = 5 سم .

(1) جد $\sphericalangle ABD$.

(2) جد R .

إجابة السؤال 5

أ. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ زاويتا القاعدة متساويتان في المثلّث المتساوي الساقين ABC .

$\sphericalangle CAB = 80^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ACB = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o

في المثلّث ABC

حسب نظريّة السينوس يتحقّق: $\frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$

$\frac{AB}{\sin 50^o} = 2R$

$\Downarrow$

$AB = 2R \sin 50^o$

ب. $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle CAB = 160^o$ الزاوية المركزيّة في الدائرة هي ضعف الزاوية المحيطيّة التي تستند إلى نفس القوس

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 5.

جـ. (1)

$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$ زاويتا القاعدة متساويتان في المثلّث المتساوي الساقين BCO

$\sphericalangle COB = 160^o$ بُرهن في البند "ب"

$\Downarrow$

$\sphericalangle OBC = \dfrac{180^o - 160^o}{2} = 10^o$ مجموع الزوايا في المثلّث هو 180^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABD = 50^o - 10^o = 40^o$

(2) في المثلّث ADB
حسب نظريّة السينوس
يتحقّق:

$$\frac{AB}{\sin \sphericalangle ADB} = \frac{BD}{\sin \sphericalangle DAB}$$

$\sphericalangle ADB = 180^o - 80^o - 40^o = 60^o$ مجموع الزوايا في المثلّث ADB

$\Downarrow$

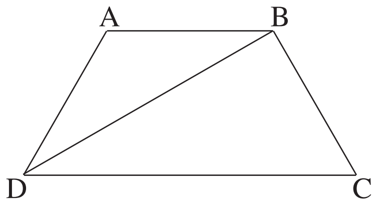
$$\frac{2R \sin 50^o}{\sin 60^o} = \frac{5}{\sin 80^o}$$

$\Downarrow$

R = 2.87 سم

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5



ABCD هو شبه منحرف متساوي الساقين
($AB < DC$, $AB \parallel DC$)
(انظر الرسم) .
معطى أنّ: $AD = AB = BC = m$
$\sphericalangle ABD = \alpha$

أ. معطى أنّ مساحة المثلّث DAB هي $\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$.
جد α .

ب. معطى أنّ مساحة شبه المنحرف ABCD هي $27\sqrt{3}$.
جد m .

إجابة السؤال 5

أ. في المثلّث المتساوي الساقين ABD يتحقّق: $\sphericalangle BAD = 180^o - 2\alpha$

$\Downarrow$

$AD = AB = m$ ، لذلك: $S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2}m^2\sin(180^o - 2\alpha)$

$\Downarrow$

$$\frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}m^2\sin(2\alpha)$$

$\Downarrow$

$$\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Downarrow$

حلّا المعادلة بالنسبة لـِ $180^o < \alpha < 0^o$ هما: $\alpha = 30^o$, $\alpha = 60^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAB$ هي زاوية منفرجة لأنّ $AB < DC$ ،
وهي $180^o - 2\alpha$ ، لذلك: $\alpha = 30^o$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب. $S_{\text{شبه المنحرف}} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DBC}$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$ ، وجدنا أنّ $\alpha = 30^o$ ، لذلك: $\sphericalangle DBC = (180^o - 2\alpha) - \alpha = 90^o$

$\Downarrow$

$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BC$

في المثلّث المتساوي الساقين ABD يتحقّق: $\frac{\frac{1}{2}DB}{AD} = \cos \sphericalangle ABD = \cos 30^o$

$\Downarrow$

$DB = 2 \cdot m \cdot \cos 30^o = m\sqrt{3}$

من هنا: $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot m\sqrt{3} \cdot m = \frac{m^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{\text{شبه المنحرف}} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} + \frac{m^2\sqrt{3}}{2} = \frac{m^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$

$\Downarrow$

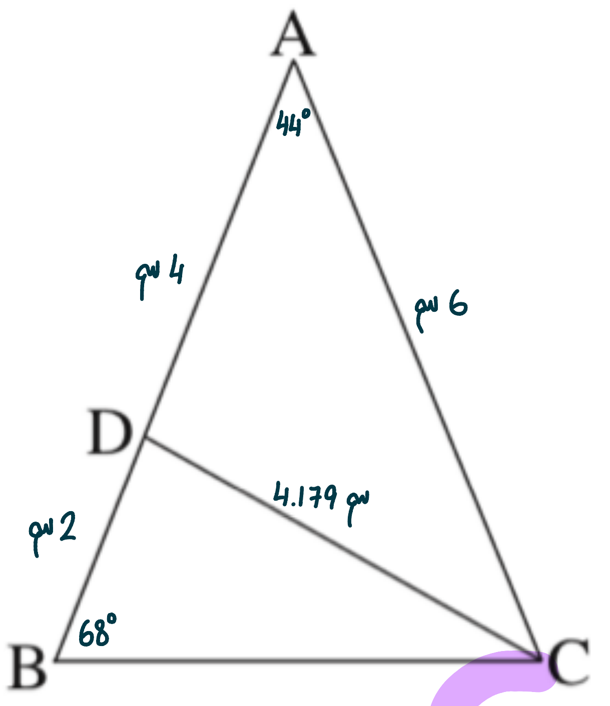
$27\sqrt{3} = \frac{m^2 3\sqrt{3}}{4}$

$\Downarrow$

$m = 6$

/ يتبع في صفحة 11 /

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٥ - سؤال ٥



5. في المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$

النقطة D تقع على الساق AB (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\measuredangle BAC = \alpha$ ،

مساحة المثلّث ABC هي 12.5 سم².

أ. عبّر بدلالة α عن طول ساق المثلّث ABC .

معطى أيضًا أنّ: $\alpha = 44^o$

$BD =$ 2 سم

ب. جد طول DC .

جـ. جد مقدار الزاوية BCD .

أ. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\measuredangle A) = 12.5$ سم²

$\frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin\alpha = 12.5$

$AB^2 = \frac{25}{\sin\alpha}$

$AB = \frac{5}{\sqrt{\sin\alpha}}$

ب. من المعطى: $AB = 5.999 \approx 6$ سم $\leftarrow$ $AD = 4$ سم

نظرية cos $\triangle ADC$:

$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(\measuredangle DAC)$

$= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 44°$

$DC = 4.179$ سم

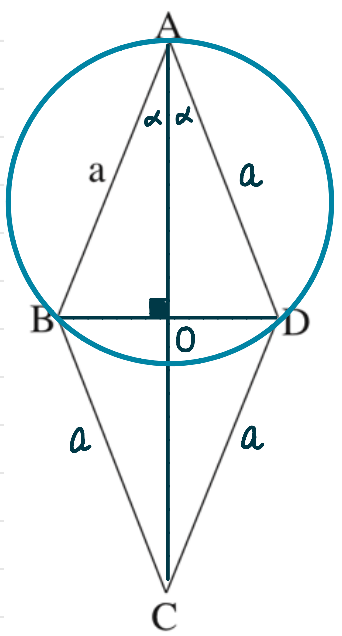
ج. $\triangle ABC$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية ومجموع زواياه $180°$ $\Leftarrow$ $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 68°$

نظرية sin $\triangle BDC$: $\frac{DC}{\sin(\measuredangle B)} = \frac{DB}{\sin(\measuredangle BCD)}$ $\leftarrow$ $\frac{4.179}{\sin 68°} = \frac{2}{\sin(\measuredangle BCD)}$ $\leftarrow$ $\sin(\measuredangle BCD) = 0.443$

$\measuredangle BCD = 26.342°$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٥

كل اضلاعه متساوية



5. في المعيَّن ABCD الذي ضلعه a (انظر الرسم)

معطى أنّ: $\measuredangle BAD = 2\alpha$ ، $\measuredangle BAD < 90^o$.

أ. (1) عبِّر عن AC وعن BD بدلالة a وَ α .

(2) معطى أيضًا أنّ: $AC \cdot BD = a^2$.

جد α .

ب. معطى أيضًا أنّ نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABD هو 10 سم.

جد مساحة المعيَّن ABCD (قيمة عدديّة).

أ. (1) بالمعين ABCD كل اضلاعه متساوية, كل زوج زوايا متقابله متساوية وكل زوج زوايا متجاوره مجموعها 180°. اقطاره تنصّف بعضها البعض, تعامد بعضها البعض وتنصّف زوايا الشكل.

$\measuredangle BAO = \measuredangle OAD = \alpha$

* ΔAOB $\quad \sin\alpha = \frac{BO}{a}$ $\quad \cos\alpha = \frac{AO}{a} \ \Big|\cdot a$

$BO = a\sin\alpha$ $\quad AO = a\cdot\cos\alpha$

$AC = 2AO = 2a\cos\alpha$

$BD = 2BO = 2a\sin\alpha$

(2) $AC\cdot BD = (2a\cdot\cos\alpha)(2a\cdot\sin\alpha) = a^2$

$4a^2\cdot\cos\alpha\sin\alpha = a^2$

$2\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha = 1 \ \Big|:2$

$\sin(2\alpha) = 0.5$

$2\alpha = 30^\circ$

$\alpha = 15^\circ$

ب. نظرية sin بالمثلث ΔABD : $\frac{BD}{\sin\measuredangle A} = 2R$

$\frac{2a\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\cdot 10 \ \Big|\cdot\sin 30^\circ$

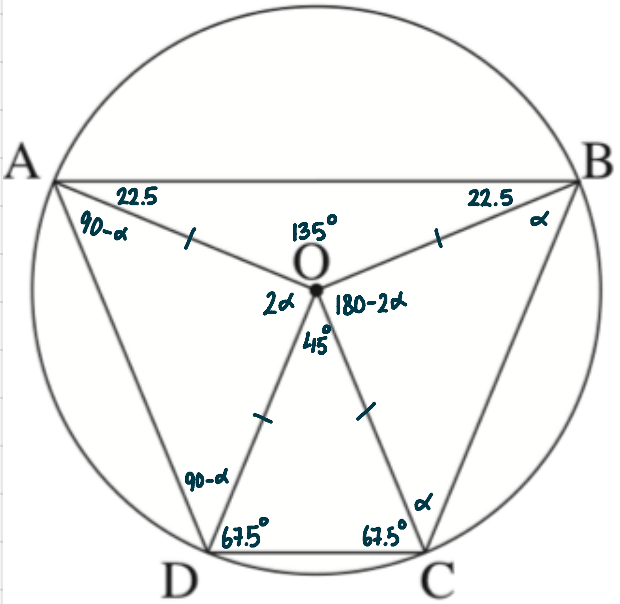
$2a\sin 15^\circ = 20\cdot\sin 30^\circ \ \Big|: 2\cdot\sin 15^\circ$

$a = \frac{20\sin 30^\circ}{2\sin 15^\circ} = 19.318$

$\Leftarrow$ $AC = 2\cdot 19.31\cdot\sin 15^\circ = 9.99$ سم

$BD = 2\cdot 19.31\cdot\cos 15^\circ = 37.3$ سم

$S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2} = 186.31$ سم²



5. شبه المنحرف ABCD ($AB \parallel DC$) محصور في دائرة مركزها O ونصف قطرها R (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\measuredangle DOC = 45°$ ، $\measuredangle AOB = 135°$.

أ. (1) جد $\measuredangle BOC$.

(2) جد $\measuredangle BAD$.

ب. معطى أنّ ارتفاع شبه المنحرف هو 13.065 سم.

جد R.

جـ. بيّن أن مساحة المثلّث AOB تساوي مساحة المثلّث DOC.

د. جد مساحة شبه المنحرف ABCD.

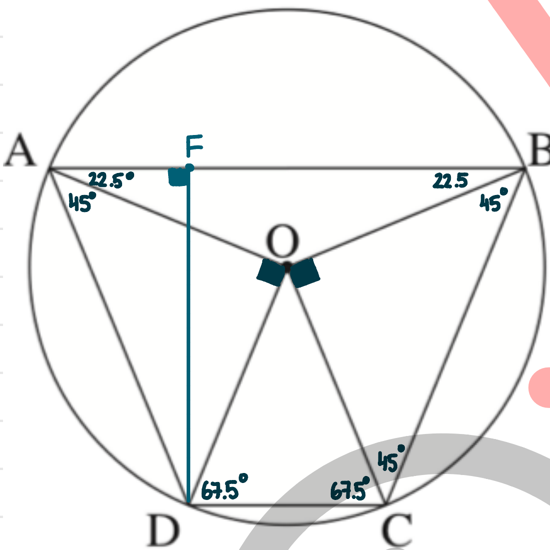
* $AO = BO = DO = CO$ أنصاف أقطار الدائرة ⇐ ΔAOB ، ΔBOC ، ΔDOC ، ΔAOD متساوي الساقين
⇐ زوايا القاعدة متساوية

* نفرض $\measuredangle OBC = \alpha$ ، $\measuredangle O = 360°$ + مجموع زوايا كل مثلث $180°$
ΔAOB ، ΔCOB ، ΔDOC ، ΔAOD متساوي الساقين، لذلك زوايا القاعدة متساوية ⇐ (الزوايا في الرسم)

أ.1 ABCD شبه منحرف لذلك مجموع الزاويتين على كل ساق هو $180°$ ⇐ $\measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$$22.5° + \alpha + 67.5° + \alpha = 180°$$
$$2\alpha = 90°$$
$$\alpha = 45° \longrightarrow \measuredangle BOC = 180 - 2\alpha = 180 - 2\cdot 45 = 90°$$

.2 $\measuredangle BAD = 90 - \alpha + 22.5 = 112.5 - 45 = 67.5°$



ب. DF ارتفاع الشبه منحرف.

ΔAFD مثلث قائم: $\sin(\measuredangle A) = \frac{FD}{AD} \leftarrow \sin 67.5 = \frac{13.065}{AD}$

$AD = 14.141$ سم

ΔAOD مثلث قائم، فيثاغورس: $AO^2 + OD^2 = AD^2$

$$R^2 + R^2 = 14.141^2$$
$$2R^2 = 199.967$$
$$R = 9.99 \approx 10 \text{ سم}$$

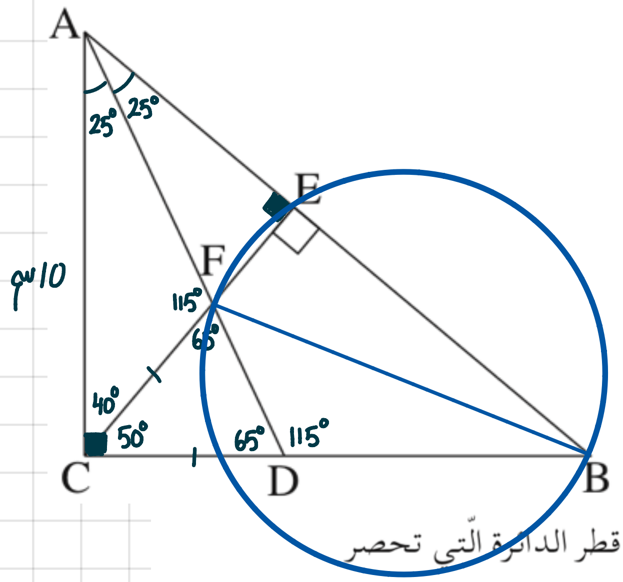
جـ. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\cdot \sin(\measuredangle AOB) = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot \sin 135° = 35.35$ سم²

$S_{\Delta DOC} = \frac{1}{2}\cdot DO\cdot CO\cdot \sin(\measuredangle DOC) = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot \sin 45° = 35.35$ سم²

=

د. $S_{ABCD} = \underbrace{S_{\Delta AOB}}_{\text{بند ج}} + \underbrace{S_{\Delta BOC}}_{\frac{BO\cdot OC}{2}} + \underbrace{S_{\Delta DOC}}_{\text{بند ج}} + \underbrace{S_{\Delta AOD}}_{\frac{AO\cdot OD}{2}} = 35.35 + \frac{10\cdot 10}{2} + 35.35 + \frac{10\cdot 10}{2}$

$= 170.7$ سم²



5. معطى المثلّث القائم الزاوية ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$).
CE هو ارتفاع على الوتر، وَ AD هو منصّف الزاوية CAB
CE وَ AD يلتقيان في النقطة F
(انظر الرسم).
معطى أنّ: AC = 10 سم ، $\sphericalangle CAB = 50^\circ$.
أ. جد مساحة المثلّث CFD .
ب. (1) جد طول القطعة FB .
(2) استعن بالبند الفرعيّ ب(1) ، وَجِد طول نصف قطر الدائرة الّتي تحصر المثلّث FEB .

* مجموع زوايا كل مثلث هو 180° . نجد كل الزوايا الممكنة (على الرسم)

أ. * ΔACD مثلث قائم : $\tan 25^\circ = \frac{CD}{10} \leftarrow CD = 4.66$ سم

* ΔCDF به زاويتان متساويتان لذلك هو متساوي الساقين $CD = CF = 4.66$ سم

$S_{\Delta CFD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD \cdot \sin(\sphericalangle FCD) = \frac{1}{2} \cdot 4.66 \cdot 4.66 \cdot \sin 50^\circ = 8.31$ سم^2

ب. 1. * ΔABC مثلث قائم : $\tan 50^\circ = \frac{CB}{10} \leftarrow CB = 11.917$ سم

* ΔCFB نظرية cos :
$FB^2 = CF^2 + CB^2 - 2 \cdot CF \cdot CB \cdot \cos(\sphericalangle FCB)$
$= 4.66^2 + 11.917^2 - 2 \cdot 4.66 \cdot 11.917 \cdot \cos 50^\circ$
$\leftarrow FB = 9.609$ سم

2. $\sphericalangle FEB = 90^\circ$. الزاوية المحيطية القائمة بالدائرة تقابل قطر الدائرة $\leftarrow$ FB قطر

$\Leftarrow$ نصف القطر $= \frac{FB}{2} = 4.804$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٦ - سؤال ٥

5. معطى المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$.

بنوا على الساق AC المربّع ACFG

الذي يتقاطع قطراه في النقطة M .

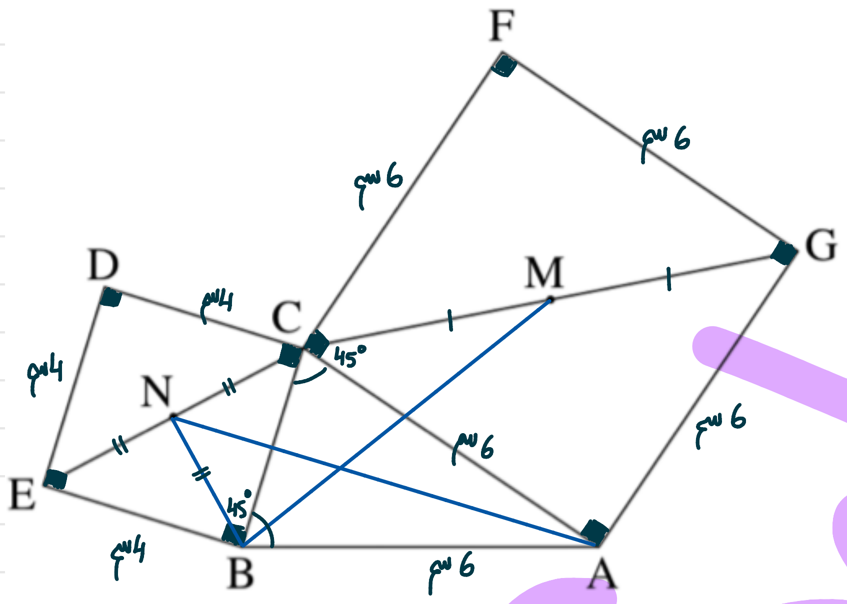
بنوا على القاعدة BC المربّع BCDE

الذي يتقاطع قطراه في النقطة N

(انظر الرسم).

معطى أنّ: $AB = AC = 6$ سم

$BC = 4$ سم



أ. جد طول قطر المربّع ACFG ،

وطول قطر المربّع BCDE .

ب. جد مقدار زاوية القاعدة في المثلّث ABC .

جـ. بيّن أنّ مساحة المثلّث BCM تساوي مساحة المثلّث ABN .

د. جد طول القطعة AN .

أ. بالمربع كل اضلاعه وزواياه $180°$. نستخدم نظرية فيثاغورس بالمثلث ΔECB والمثلث ΔACG

$CG^2 = 6^2 + 6^2$

$CG = \sqrt{72} = 8.485$ سم

$EC^2 = 4^2 + 4^2$

$EC = \sqrt{32} = 5.656$ سم

ب. نظرية cos بالمثلث ΔABC : $BA^2 = CB^2 + AC^2 - 2 \cdot CB \cdot AC \cdot \cos(\measuredangle CBA)$

$6^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\measuredangle CBA)$

$-16 = -48 \cdot \cos(\measuredangle CBA)$

$\leftarrow$ $\cos(\measuredangle CBA) = \frac{1}{3}$

$\measuredangle CBA = 70.52°$

ج. اقطار المربع متساوية, تنصّف بعضها البعض, تعامد بعضها البعض وتنصّف زوايا الشكل

$S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CM \cdot \sin(\measuredangle BCM) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{8.485}{2}\right) \cdot \sin(70.52 + 45) = 7.657$ سم^2

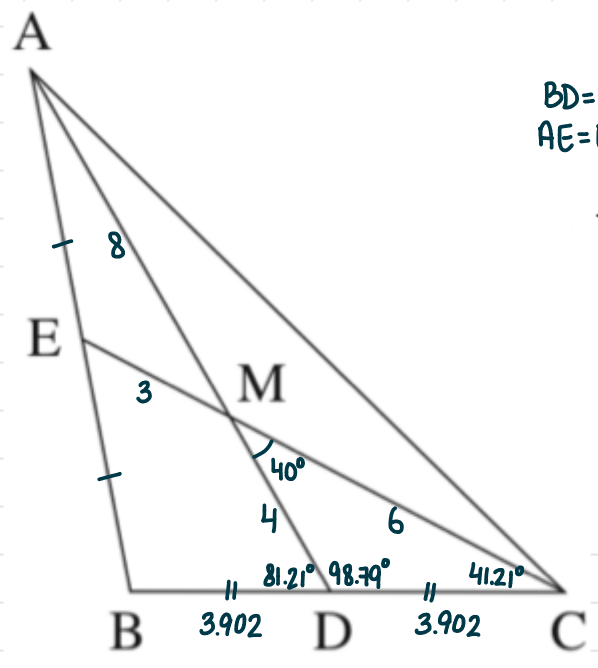
$S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} \cdot NB \cdot BA \cdot \sin(\measuredangle NBA) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5.656}{2}\right) \cdot 6 \cdot \sin(70.52 + 45) = 7.656$ سم^2

$=$

د. ΔANB نظرية cos : $NA^2 = NB^2 + BA^2 - 2 \cdot NB \cdot BA \cdot \cos(\measuredangle NBA)$

$= 2.828^2 + 6^2 - 2 \cdot 2.828 \cdot 6 \cdot \cos(70.52 + 45)$

$\leftarrow$ $NA = 7.656$ سم



.5 AD وَ CE هما مستقيمان متوسّطان في المثلّث ABC
يلتقيان في النقطة M (انظر الرسم).
معطى أنّ: AD = 12 سم، CE = 9 سم، $\sphericalangle CMD = 40^\circ$

$BD=DC$
$AE=EB$

أ. احسب طولَي القطعتين: MC ، MD .
ب. احسب طول الضلع BC .
جـ. احسب مقدار الزاوية $\sphericalangle MCD$.
د. احسب مساحة المثلّث ADB .

أ. كل المتوسطات بالمثلث تلتقي في نفس النقطة.
نقطة التقاء المتوسطات M تقطع كل متوسط بنسبة 2:1

$\Leftarrow$ $AM = 2MD$ نفرض $MD = x$ $\leftarrow$ $AM = 2x$

$\Leftarrow$ $AD = 3x = 12$ سم $\backslash :3$

$x = 4$ $\leftarrow$ $MC = 8$ سم , $MD = 4$ سم

ب. حسب نفس النظرية: $MC = 2EM$ نفرض $EM = y$ $\leftarrow$ $MC = 2y$

$\Leftarrow$ $EC = 3y = 9$ $\backslash :3$

$y = 3$ $\leftarrow$ $EM = 3$ سم, $MC = 6$ سم

نظرية cos ΔMDC: $DC^2 = MD^2 + MC^2 - 2\cdot MD\cdot MC\cdot \cos(\sphericalangle DMC)$

$DC^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos 40^\circ$

$DC^2 = 15.229$

$DC = 3.902$ $\longleftarrow$ $BC = 2DC = 7.805$ سم

ج. طريقة 1 - حسب نظرية sin بالمثلث ΔMDC

$$\frac{DC}{\sin(\sphericalangle DMC)} = \frac{MD}{\sin(\sphericalangle MCD)}$$

$$\frac{3.902}{\sin 40^\circ} = \frac{4}{\sin(\sphericalangle MCD)}$$

$3.902\cdot \sin(\sphericalangle MCD) = 4\sin 40$ $\backslash : 3.902$

$$\sin(\sphericalangle MCD) = \frac{4\sin 40}{3.902} = 0.658$$

$\sphericalangle MCD = 41.21^\circ$

طريقة 2 - حسب نظرية cos بالمثلث ΔMDC

$MD^2 = MC^2 + DC^2 - 2\cdot MC\cdot DC\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$

$4^2 = 6^2 + (3.902)^2 - 2\cdot 6\cdot 3.902\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$

$16 = 51.22 - 46.82\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$

$-35.22 = -46.82\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$ $\backslash : -46.82$

$0.752 = \cos(\sphericalangle MCD)$

$\sphericalangle MCD = 41.21^\circ$

د. مجموع زوايا المثلث ΔMDC 180°

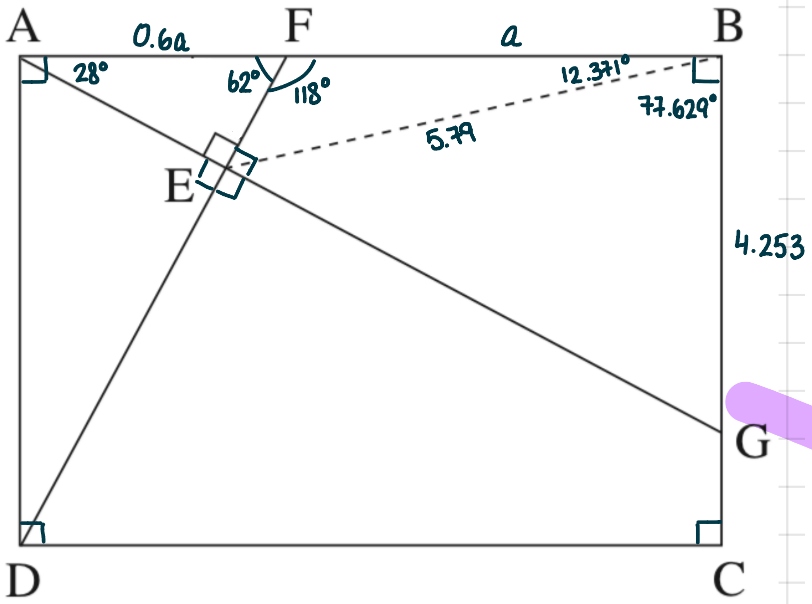
$\leftarrow$ $\sphericalangle MDC = 98.79^\circ$

$\leftarrow$ $\sphericalangle ADB = 81.21^\circ$

(المكمل لـ 180°)

$\Leftarrow$ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD\cdot \sin(\sphericalangle ADB)$

$= \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3.902\cdot \sin(81.21^\circ) = 23.13$ سم^2



.5 معطى المستطيل ABCD . ← كل زواياه قائمة

النقطة F تقع على الضلع AB

بحيث FB = a ، AF = 0.6 a .

النقطة G تقع على الضلع BC

بحيث AG يعامد DF .

AG وَ DF يتقاطعان في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\measuredangle AFE = 62°$.

أ. (1) عبّر عن طول القطعة EF بدلالة a .

(2) عبّر عن طول القطعة BE بدلالة a .

ب. معطى أنّ " a = 5 سم .

(1) جد الزاوية EBA . ← $\measuredangle FBE =$

(2) احسب مساحة المثلّث EBG .

أ1. ΔAFE مثلث قائم

$\cos(\measuredangle AFE) = \frac{EF}{AF} \rightarrow \cos 62° = \frac{EF}{0.6a} \quad / \cdot 0.6a$

$EF = \cos 62° \cdot (0.6a)$

$EF = 0.281 \cdot a$

أ2. * AFB خط مستقيم ← $\measuredangle EFB = 118°$

* ΔEFB نظرية cos

$EB^2 = EF^2 + FB^2 - 2 \cdot EF \cdot FB \cdot \cos(\measuredangle EFB)$

$EB^2 = (0.281a)^2 + a^2 - 2 \cdot 0.281a \cdot a \cdot \cos 118°$

$EB^2 = 1.0789\,a^2 + 0.2638 \cdot a^2$

$EB^2 = 1.3427 \cdot a^2 \quad / \sqrt{\ }$

$EB = 1.158\,a$

ب1. $a = 5 \Leftarrow EF = 1.405$ سم

$EB = 5.79$ سم

ΔEFB نظرية sin $\quad \frac{EF}{\sin(\measuredangle FBE)} = \frac{EB}{\sin(\measuredangle EFB)} \leftarrow \frac{1.405}{\sin(\measuredangle FBE)} = \frac{5.79}{\sin 118°} \leftarrow \sin(\measuredangle FBE) = \frac{1.405 \cdot \sin 118°}{5.79}$

$\measuredangle FBE = 12.371°$

ب2. * مجموع زوايا المثلث $180°$ في $\Delta AFE \Leftarrow \measuredangle FAE = 28°$ $\quad$ * $AB = 1.6a = 8$ سم

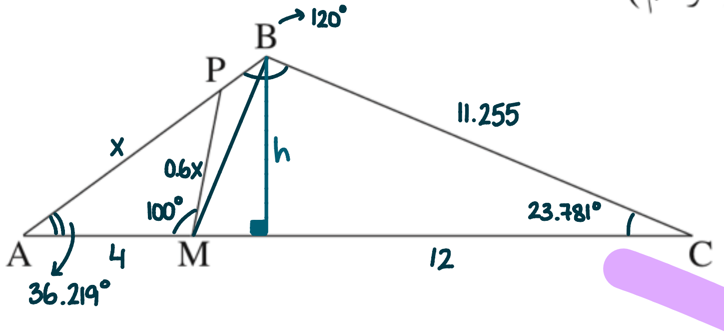
* ΔABG مثلث قائم $\quad \tan(\measuredangle BAG) = \frac{BG}{AB} \leftarrow \tan 28° = \frac{BG}{8} \leftarrow BG = 4.253$ سم

* $\measuredangle B = 90° \leftarrow \measuredangle EBG = 77.629°$

* $S_{\Delta EBG} = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BG \cdot \sin(\measuredangle EBG) = \frac{1}{2} \cdot 5.79 \cdot 4.253 \cdot \sin(77.629°) = 12.026$ سم²

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٥

5. في المثلّث ABC النقطة P تقع على الضلع AB ، والنقطة M تقع على الضلع AC (انظر الرسم).



نرمز:

$AP = x$.

معطى أنّ:

$PM = 0.6x$ ،

$\measuredangle AMP = 100^o$ ، $\measuredangle ABC = 120^o$ ،

$MC = 12$ سم ، $AM = 4$ سم .

أ. (1) احسب الزاوية PAM .

(2) احسب طول الضلع BC .

ب. احسب طول القطعة BM .

جـ. جد النسبة بين مساحتَي المثلّثين $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta BMC}}$. علّل إجابتك .

أ1. ΔPAM نظرية sin :

$\frac{PM}{\sin(\measuredangle PAM)} = \frac{PA}{\sin(\measuredangle PMA)} \leftarrow \frac{0.6x}{\sin(\measuredangle PAM)} = \frac{x}{\sin 100^\circ} \leftarrow \sin(\measuredangle PAM) = \frac{0.6\cancel{x}\cdot\sin 100^\circ}{\cancel{x}}$

$\measuredangle PAM = 36.219^\circ$

أ2. ΔABC نظرية sin :

$\frac{AC}{\sin(\measuredangle B)} = \frac{BC}{\sin(\measuredangle A)} \leftarrow \frac{16}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 36.219^\circ} \leftarrow BC = \frac{16\cdot\sin 36.219^\circ}{\sin 120^\circ}$

$BC = 10.916$ سم

ب. ΔABC مجموع زوايا المثلث $180^\circ \Leftarrow \measuredangle C = 23.781^\circ$

ΔBMC نظرية cos $BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2\cdot BC\cdot MC\cdot\cos(\measuredangle C)$

$BM^2 = 10.916^2 + 12^2 - 2\cdot 10.916\cdot 12\cdot\cos(23.781^\circ)$

$BM^2 = 23.419$

$BM = 4.839$ سم

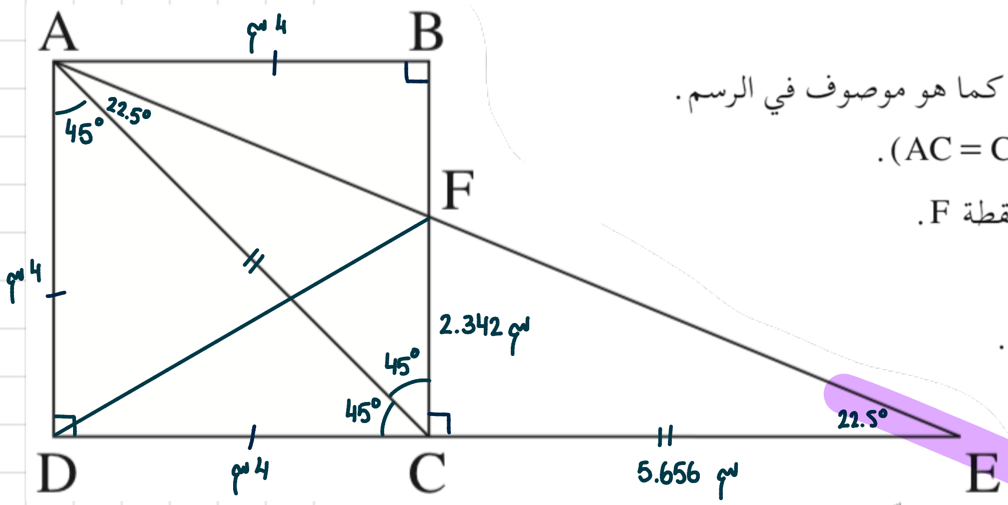
جـ. نفرض ان الارتفاع من النقطة B للضلع AC هو h.

$S_{\Delta BMC} = \frac{h\cdot MC}{2} = \frac{h\cdot 12}{2} = 6h$

$S_{\Delta BMA} = \frac{h\cdot AM}{2} = \frac{h\cdot 4}{2} = 2h$

$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{2h}{6h} = \frac{1}{3}$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ موعد ب - سؤال ٥



5. معطى المربّع ABCD.
النقطة E تقع على امتداد الضلع DC، كما هو موصوف في الرسم.
المثلّث ACE هو متساوي الساقين $(AC = CE)$.
المستقيم AE يقطع الضلع BC في النقطة F.
أ. جد زوايا المثلّث ACE.
مساحة المثلّث ACE هي $8\sqrt{2}$ سم^2.
ب. احسب طول ضلع المربّع.
جـ. احسب طول القطعة DF.
د. جد طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث DFE.

أ. * ABCD مربّع اذاً كل زواياه واضلاعه متساوية $AB=BC=CD=DA$, $\measuredangle A=\measuredangle B=\measuredangle BCD=\measuredangle D=90°$

* AC قطر بالمربّع ⇐ ينصّف زوايا الشكل $\measuredangle DAC=\measuredangle CAB=\measuredangle BCA=\measuredangle ACD=45°$

* ΔACB مثلث متساوي الساقين (معطى $AC=CE$)، لذلك زوايا القاعدة متساوية $\measuredangle CAE=\measuredangle E$ ، مجموع زوايا المثلث هو $180°$ و $\measuredangle ACE=135°$ ⇐ $\measuredangle CAE=\measuredangle E=22.5°$

ب. * $S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot \sin(\measuredangle ACE)$ نعرّف $CE=AC=x$

$8\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \sin 135$

$8\sqrt{2}=0.353\cdot x^2 \quad \backslash :0.353$

$x^2=32$

$x=5.656$ سم

* ΔADC نعرّف $AD=DC=t$. فيثاغورس:

$AD^2+DC^2=AC^2$

$t^2+t^2=5.656^2$

$2t^2=32 \quad \backslash :2$

$t^2=16$

$t=4$ ← طول ضلع المربّع 4 سم

جـ. ΔFCE مثلث قائم $\tan(\measuredangle E)=\frac{FC}{CE}$

$\tan(22.5°)=\frac{FC}{5.656} \quad \backslash \cdot 5.656$

$FC=\tan(22.5)\cdot 5.656=2.342$ سم

⇐ ΔDFC مثلث قائم، فيثاغورس:

$DF^2=DC^2+CF^2$

$DF^2=4^2+(2.342)^2$

$DF^2=21.484$

$DF=4.635$ سم

د. ΔDFE نظرية sin

$\frac{DF}{\sin(\measuredangle E)}=2R$ ← $\frac{4.635}{\sin(22.5°)}=2R$

R نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث

$12.112=2R \quad \backslash :2$ ← $R=6.056$ سم