

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך – $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א ומעלית ב.

שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו זמן.

מעלית א עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה

33 מטרים. מעלית ב עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה

שגובהה 81 מטרים.

מעלית א הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב לקומה שגובהה 81 מטרים.

לאחר מכן, התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן.

מעלית א ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות.

בזמן שירדה מעלית א, ירדה מעלית ב 63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים.

ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה. כמו כן ידוע כי המעליות נעות

במהירויות קבועות.

א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.

מעלית א הייתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים.

שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים.

מעלית א עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים.

מעלית ב ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות.

שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.

ב. האם מעלית ב הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

2. נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא:

$$S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n \quad , \quad k > 0 \quad , \quad p > 0 \quad \text{הם פרמטרים.}$$

א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k, p ו- n , בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי. הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , ההפרש של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n .

מנת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n).

הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$,

$$k = 1.5 \quad , \quad p = 4.5$$

ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל אברי הסדרה האינסופית c_n הוא $\frac{1}{3} \cdot 40$.

ג. חשב את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.

בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.

המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.

נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

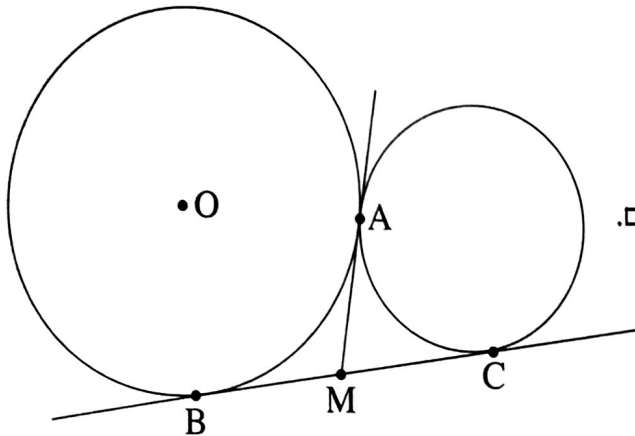
ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).

הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.

מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.

B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.

M שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הזווית $\angle BAC$ ישרה.

ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$

נתון: $AB = 8$, $AC = 6$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשב את יחס השטחים $\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}}$.

5. DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט. רדיוס המעגל: R.

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.

הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל-AB.

נסמן: $\angle ABC = \alpha$.

א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC.

(2) את המרובע MDEC.

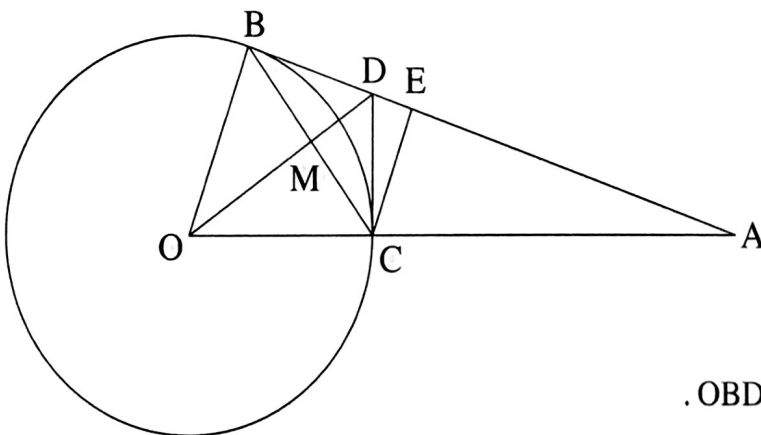
נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.

d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^3}$

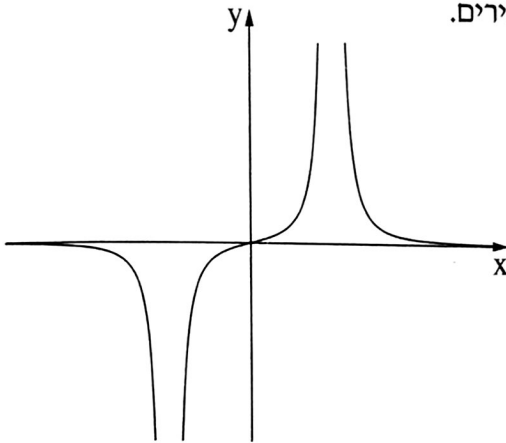
א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x) = f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^1 f(x) dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$, $x = -1$.

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$. $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 4a}}{x^3}$. $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקולך.

(2) מהו הערך של a ? נמק את תשובתך.

8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a .

נתון: $\angle BAC = \alpha$ (ברדיאנים).

נסמן: $\angle ABC = x$ ($0 < x < \pi - \alpha$).

א. הבע באמצעות x ו- a את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α את ערך ה- x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

בהצלחה!