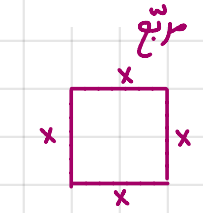
בגרות ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ١

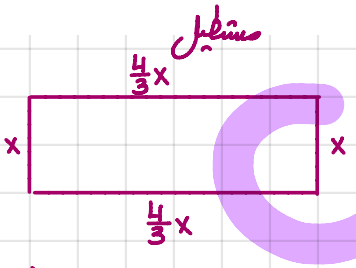
1. حصل أحد الطلّاب في درس الفنّ على خيط حديديّ طوله 52a سم، وحضّر منه إطارَيْن للصور:
شكل أحد الإطارين مربّع وشكل الإطار الآخر مستطيل.
طول أحد ضلعَي المستطيل يساوي طول ضلع المربّع، والضلع الآخر للمستطيل يساوي $\frac{4}{3}$ ضعف ضلع المربّع.
كان الخيط كافيًا بالضبط لتحضير الإطارين.

أ. عبّر بدلالة a عن طولَي ضلعَي المستطيل.

ب. حضّر الطالب من خيط حديديّ آخر (طوله مختلف) إطارَيْن آخرين: إطارًا مستطيلاً مطابقًا للإطار المستطيل الأوّل، وإطارًا شكله مربّع ضلعه أطول بـ 65% من ضلع المربّع الأوّل.
جد ما هي النسبة المئويّة التي بها الخيط الآخر أطول من الخيط الأوّل.

ج. طول قطر المستطيل هو 45 سم.
احسب طولَي ضلعَي المستطيل.





أ.

$\Leftarrow$

محيط $= 4x$

محيط $= 2x+2\cdot\frac{4}{3}x = \frac{14}{3}x$

$\Rightarrow$

$$4x+\frac{14}{3}x = 52a$$

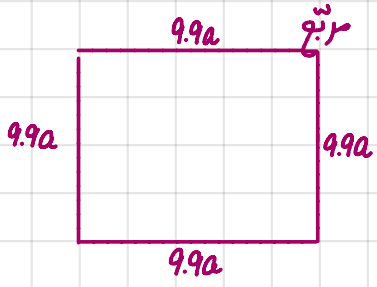
$$\frac{26}{3}x = 52a \quad \backslash\cdot\frac{3}{26}$$

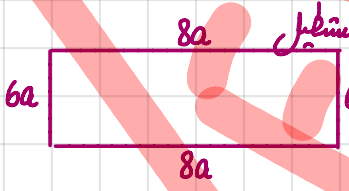
$$x = 6a$$

$\Leftarrow$ طول أضلاع المستطيل: $\frac{4}{3}x$, x $\Leftarrow$ $x=6a$

$\Leftarrow$ 8a سم , 6a سم

ب.





$\Rightarrow$

طول الخيط = مجموع محيط المستطيل والمربّع

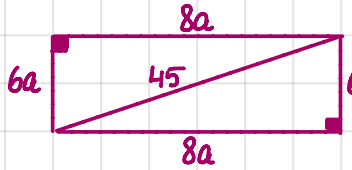
$$67.6a = 9.9a\cdot 4 + 2\cdot 8a + 2\cdot 6a$$ سم

طول الخيط الأخضر $\rightarrow$ $\frac{67.6a}{52a}\cdot 100 = 130\%$

طول الخيط الأوّل $\rightarrow$

$\Rightarrow$ الطول بـ 30%

ج.



كل زوايا المستطيل قائمة، فيثاغورس:

$$(6a)^2+(8a)^2 = 45^2$$
$$36a^2+64a^2 = 2025$$
$$100a^2 = 2025 \quad \backslash:100$$
$$a^2 = 20.25$$
$$a = 4.5$$

طول أضلاع المستطيل 8a , 6a أي: 36 سم , 27 سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٢

2. دائرة مركزها في النقطة $M(4,1)$ تقطع المحور y في النقطة C ، كما هو موصوف في الرسم.
من النقطة B ، التي تقع في الربع الثاني، مرّروا مستقيمين يمسّان الدائرة في النقطتين A وَ C .
معادلة المستقيم AB هي $y=6$.

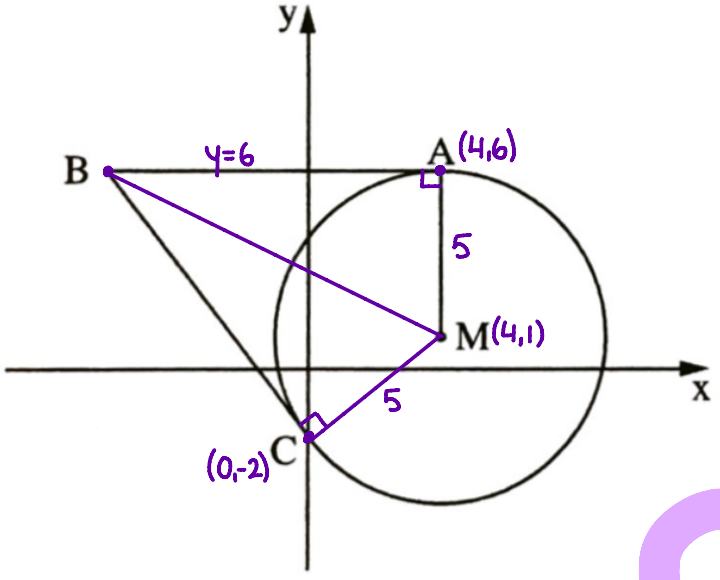
أ. ما هي معادلة الدائرة؟

ب. جد معادلة المستقيم BC .

ج. احسب مساحة الشكل الرباعيّ ABCM .

د. احسب طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث BCM .

في إجابتك أبقِ رقمين بعد الفاصلة العشريّة.



أ. الخط النازل من مركز الدائرة M للمماس AB يقاطعها في نقطة التماس A, اي: $AB \perp MA$.
AB توازي محور x (A و B لهم نفس الاحداثي y = 6) ولذلك AM توازي محور x (A و M لهم نفس الاحداثي x=4)
$A(4,6)$ ⇐ $AM = 6-1 = 5$ نصف قطر
معادلة الدائرة: ⇐ $(x-4)^2+(y-1)^2 = 25$

ب. نجد احداثيات النقطة C (تقاطع الدائرة مع محور y) , نعوض x=0 بمعادلة الدائرة:

$$(0-4)^2+(y-1)^2 = 25$$
$$16+y^2-2y+1 = 25$$
$$y^2-2y-8 = 0$$
$$(y-4)(y+2) = 0$$
$$y = 4, -2 \Leftarrow C(0,-2)$$

نجد نصف القطر MC .
الخط النازل من مركز الدائرة M للمماس BC يقاطعها في نقطة التماس C, اي: $BC \perp MC$.
نجد ميل MC: $m_{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1--2}{4-0} = \frac{3}{4}$ ⇐ خطوط متعامدة ضرب ميولها -1 ⇐ $m_{BC} \cdot m_{MC} = -1$

$$m_{BC} \cdot \frac{3}{4} = -1$$
$$m_{BC} = -\frac{4}{3}$$

نجد معادلة BC: $y = mx+n$ ⇐ $-2 = -\frac{4}{3}\cdot 0 + n$ ⇐ $y_{BC} = -\frac{4}{3}x-2$
$m_{BC} = -\frac{4}{3}$ $C(0,-2)$
$n = -2$

ج. $AM = MC = 5$ انصاف اقطار, $BC = AM$ مماسان خارجان من نفس النقطة لدائرة, متساويان.
نجد النقطة B, نقطة تقاطع AB و BC: $-\frac{4}{3}x-2 = 6 \quad | \cdot 3$
$-4x-6 = 18$
$-4x = 24 \quad | :-4$
$x = -6$
$B(-6,6)$ ⇐ $BC = AB = 4--6 = 10$ سم ⇐

$$S_{ABCM} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BMC} = \frac{5\cdot 10}{2} + \frac{5\cdot 10}{2} = 50 \text{ سم}^2$$

د. ΔBCM مثلث قائم, الدائرة التي تحصرها قطرها هو BM : فيثاغورس ΔBMC ⇐ نصف القطر
$BM^2 = 5^2+10^2$
$BM = \sqrt{125}$: القطر
$\frac{\sqrt{125}}{2} = 5.59$
(الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة)

Schools KB

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٣

3. يوجد في مدرسة معيّنة طلّاب يسكنون في المدينة وطلّاب يسكنون خارج المدينة.

نفرض ان عدد الاولاد x

* عدد البنات اللواتي يتعلّمن في المدرسة هو 1.25 ضعف عدد الأولاد الذين يتعلّمون في المدرسة. ($1.25x$)

عدد الاولاد والبنات $\Leftarrow$ $x+1.25x=2.25x$

** 75% من الأولاد يسكنون في المدينة وَ 40% من البنات يَسْكُنَّ خارج المدينة.

نسبة الاولاد: $\frac{x}{2.25x}\cdot 100 = 44.44\%$

اختاروا بشكل عشوائيّ طالبًا من بين طلّاب المدرسة (ولدًا أو بنتًا).

أ. ما هو الاحتمال بأنّهم اختاروا ولدًا يسكن في المدينة؟

ب. معلوم أنّ الطّالب الذي اختير (ولد أو بنت) يسكن في المدينة. ما هو الاحتمال بأنّه قد اختيرت بنت؟

جـ. يوجد في المدرسة 900 طالب (أولاد وبنات). كم طالبًا (ولدًا وبنتًا) يسكن في المدينة؟

د. يختارون كلّ يوم بشكل عشوائيّ طالبًا في المدرسة ليكون مناوب نظافة (يمكن أن يُختار نفس الطالب على التوالي يومًا بعد يوم).

ما هو الاحتمال بأن يكون قد اختير خلال 3 أيام متتالية على الأقلّ مُناوبان يسكنان خارج المدينة؟

($n=3$ $\quad k=2,3$ $\quad P=P(\bar{B})$)

(المناوب يمكن أن يكون ولدًا أو بنتًا.)

نبني جدول:

	A	$\bar{A}$	
	اولاد	بنات	مجموع
B	يسكن في المدينة	$\frac{75}{100}\cdot 44.44$ ** $= 33.33\%$	33.34%	66.67%
$\bar{B}$	يسكن خارج المدينة	11.11%	$\frac{40}{100}\cdot 55.55$ ** $= 22.22\%$	33.33%
	مجموع	44.44% * (x)	55.56% ($1.25x$)	100% ($2.25x$)

أ. $P(A\cap B)=\frac{33.33}{100}=0.333$

ب. $P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{33.34/100}{66.67/100}$

$=0.5$

جـ. $N(U)=900$ يوجد 900 طالب.

66.67% منهم يسكن في المدينة.

$N(B)=900\cdot\frac{66.67}{100}=600$ طالب

د. تجربة برنولي

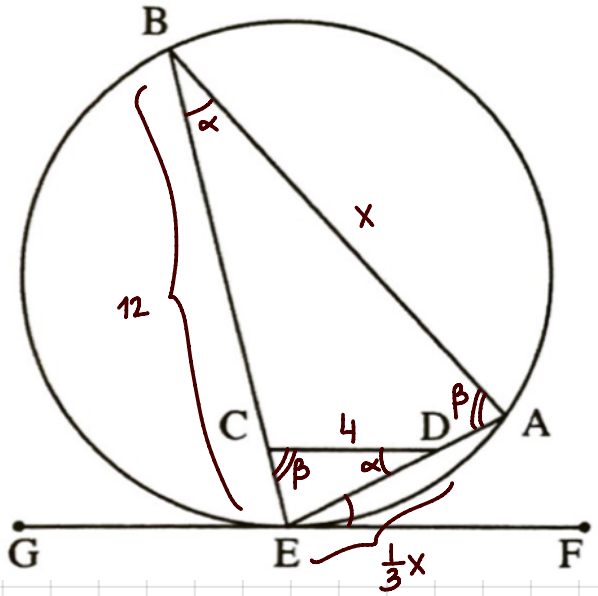
$n=3$

$k=2,3$ "على الأقل 2" = "2 او اكثر"

$p=\frac{33.33}{100}=0.333$

$$P=\binom{3}{3}(0.333)^3(1-0.333)^0+\binom{3}{2}(0.333)^2(1-0.333)^1$$
$$=0.0369+0.2218$$
$$=0.2587=\frac{7}{27}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٤



4. المثلّث AEB محصور في دائرة.
القطعة GF تمسّ الدائرة في النقطة E.
النقطتان C وَ D تقعان على الضلعين BE وَ AE بالتلاؤم،
بحيث تكون القطعة CD موازية للمماسّ.

أ. برهن أنّ: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$.

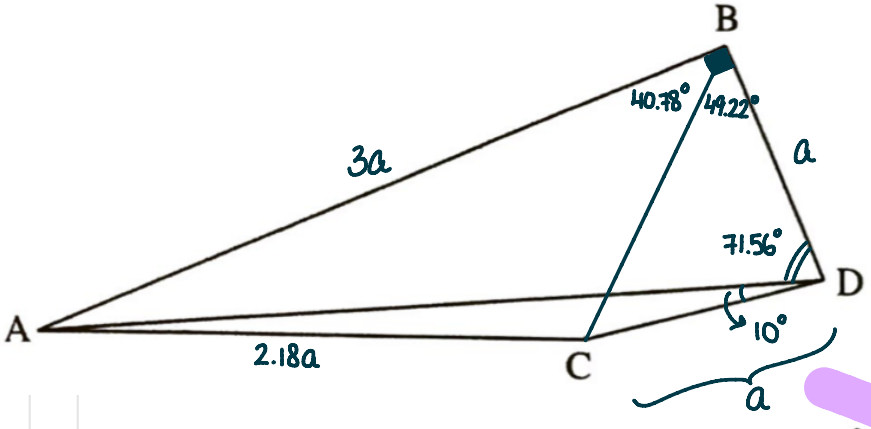
ب. برهن أنّ: $\Delta CDE \sim \Delta ABE$.

جـ. برهن أنّه يمكن حصر الشكل الرباعيّ ABCD في دائرة.

د. معطى أنّ: $CD = 4$ سم، $BE = 12$ سم، $ED = \frac{1}{3}AB$.
احسب طول القطعة ED.

إدعاء	شرح
أ. (1) $\sphericalangle AEF = \sphericalangle CDE$	معطى $CD \parallel GF$ ولذلك ينشئ زوايا متبادلة متساوية
(2) $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ABE$	الزاوية المحصورة بين مماس GF ووتر AE يساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر
(3) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$	ادعاء (1) + (2) وهو المطلوب
ب. (4) $\Delta CDE \sim \Delta ABE$	حسب ز.ز (ادعاء 3) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$ ز. $\sphericalangle BEA$ زاوية مشتركة ز. وهو المطلوب
جـ. (5) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE = \alpha°$ $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DCE = \beta°$	فرضية + من التشابة بالبند السابق
(6) $\sphericalangle BCD = 180-\beta°$ $\sphericalangle CDA = 180-\alpha°$	ادعاء 5 + زوايا مكمّلة لـ $180°$ $\sphericalangle BCE = \sphericalangle EDA = 180°$
(7) ABCD يمكن حصره في دائرة	شكل رباعي مجموع كل زاويتين متقابلتين $180°$ يمكن حصرة بدائرة. $\sphericalangle CBA + \sphericalangle CDA = 180°$ $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180°$ وهو المطلوب
د. (8) $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE} = \frac{CE}{AE}$ $\frac{4}{x} = \frac{\frac{1}{3}x}{12}$	نسب التشابه من بند ب، فرضية $AB = x$ $48 = \frac{1}{3}x^2 \quad \backslash\cdot 3$ $144 = x^2$ $x = 12$
(9) $ED = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$ سم	

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٥



5. ABD هو مثلّث قائم الزاوية ($\sphericalangle ABD = 90^\circ$) .

نرمز: $BD = a$. معطى أنّ: $AB = 3a$.

أ. احسب مقدار الزاوية ADB .

C هي نقطة خارج المثلّث.

معطى أنّ: $\sphericalangle ADC = 10^\circ$ ، $CD = BD$.

ب. عبّر بدلالة a عن طول القطعة BC .

ج. عبّر بدلالة a عن طول القطعة AC .

د. معطى أنّ: مساحة المثلّث BDC هي 30 سم^2.

احسب مساحة الشكل الرباعيّ ABDC .

أ. $\triangle ABD$ مثلث قائم : $\tan(\sphericalangle ADB) = \frac{AB}{BD}$ ← $\tan(\sphericalangle ADB) = \frac{3a}{a} = 3$ ← $\sphericalangle ADB = 71.56^\circ$

ب. $\triangle BCD$ نظرية cos :

$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos(\sphericalangle BDC)$

$BC^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(71.56 + 10)$

$BC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot 0.146$

$BC^2 = 1.706a^2$

$BC = 1.306a$

ج. * $\triangle BCD$ مثلث متساوي الساقين $(BD = CD)$ ⇐ مجموع زوايا 180° وزوايا القاعدة متساوية:

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCD = 49.22^\circ$

* $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ ⇐ $\sphericalangle ABC = 40.78^\circ$

* $\triangle ABC$ نظرية cos :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$

$AC^2 = (3a)^2 + (1.306a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 1.306a \cdot \cos 40.78^\circ$

$AC^2 = 10.705a^2 - 5.933a^2 = 4.772a^2$

$AC = 2.18a$

د. $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC \cdot \sin(\sphericalangle BDC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(81.56) = 0.494a^2 = \overbrace{30}^{\text{معطى}}$

$a^2 = 60.728$

$a = 7.788$

$S_{ABDC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BAC} = 107.575$ سم^2

معطى: 30 سم^2

$= \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1.306a \cdot \sin(40.78)$

$= 1.279 \cdot a^2$

$= 1.279 \cdot (7.788)^2$

$= 77.575$ سم^2

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٦

$f(x)=x^2(x-4)^2=x^2(x^2-8x+16)$
$=x^4-8x^3+16x^2$

6. معطاة الدالّة $f(x)=x^2(x-4)^2$ ، المعرّفة لكلّ x .

أجب عن البنود "أ – جـ" . افتح أقواسًا إذا دعت الحاجة.

أ. **(1)** جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(2) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

(3) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

(4) جد مجالات موجبيّة وسالبيّة الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

ب. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحور x .

جـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لدالّة المشتقّة، $f'(x)$.

أ. (1) تقاطع مع محور x: $0=x^2(x-4)^2$ ، $x=0,4$ ، $(0,0)$ $(4,0)$

تقاطع مع محور y: $y=0^2\cdot(0-4)=0$ ، $(0,0)$

(2) نشتق الدالة ونجد نقاطها الحرجة

$f'(x)=4x^3-24x^2+32x=0$ $\Rightarrow$ $4x(x^2-6x+8x)=0$

$4x(x-2)(x-4)=0$

$x=0,2,4$

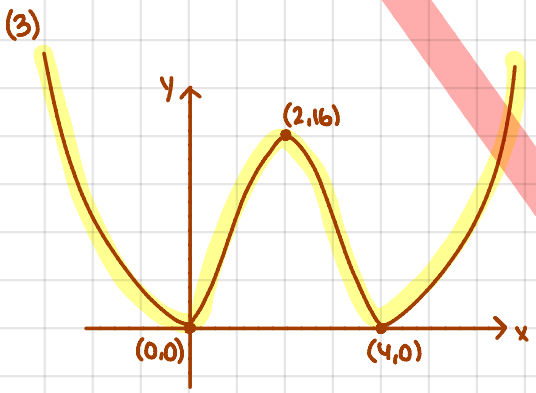
$f''(x)=12x^2-48x+32$

$f''(0)=32>0$ MIN $(0,0)$

$f''(2)=-16<0$ MAX $(2,16)$

$f''(4)=32>0$ MIN $(4,0)$

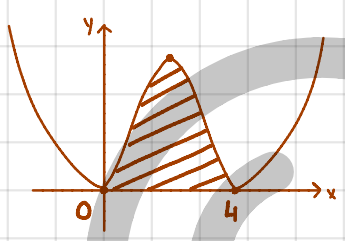
(3)



(4) $x<0$ ، $4>x>0$ ، $x>4$ مجال موجب

$\varnothing$ مجال سالب

ب.

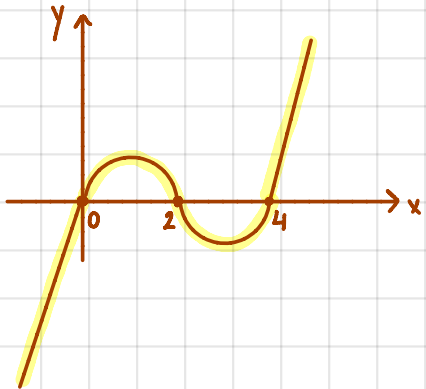


$S=\int_0^4(x^4-8x^3+16x^2)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}-8\cdot\frac{x^4}{4}+16\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4$

$=\left(\frac{4^5}{5}-8\cdot\frac{4^4}{4}+16\cdot\frac{4^3}{3}\right)-0=\frac{512}{15}=34.133$

جـ.

	$x<0$	$x=0$	$2>x>0$	$x=2$	$4>x>2$	$x=4$	$x>4$
f'	−	0	+	0	−	0	+
f	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗



بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٧

7. معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{2x-13}$.

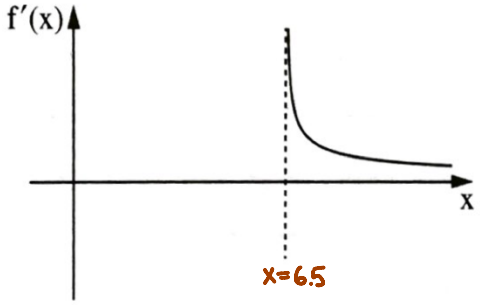
أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

$2x-13\geq 0 \Leftarrow 2x\geq 13 \Leftarrow x\geq 6.5$

(2) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط) .

(3) بيّن أنّ الدالّة $f(x)$ تصاعديّة في كلّ مجال تعريفها. اي انّ مشتقتها دائمًا موجب.

(4) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.



أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة، $f'(x)$.

ب. (1) ما هو مجال تعريف دالّة المشتقّة، $f'(x)$ ؟

(2) ما هي معادلة خطّ التقارب العموديّ لدالّة المشتقّة، $f'(x)$ ؟

الرسمان البيانيّان للدالّتين $f(x)$ وَ $f'(x)$ يتقاطعان في النقطة A .

جـ. احسب إحداثيّات النقطة A .

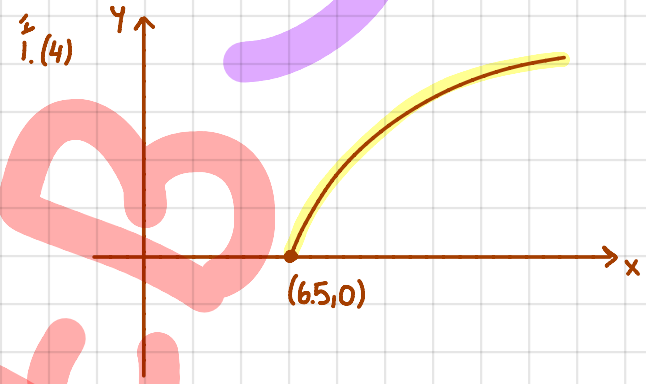
أنزلوا من النقطة A عمودًا على المحور x .

د. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والعمود والمحور x والمستقيم $x=11$.

أ. (2) تقاطع مع محور x: $0=\sqrt{2x-13}$ ، $0=2x-13$ ، $13=2x$ ، $x=6.5$ ، $(6.5,0)$

تقاطع مع محور y: $x=0$ ليس بمجال التعويض ، $\varnothing$

أ. (4)

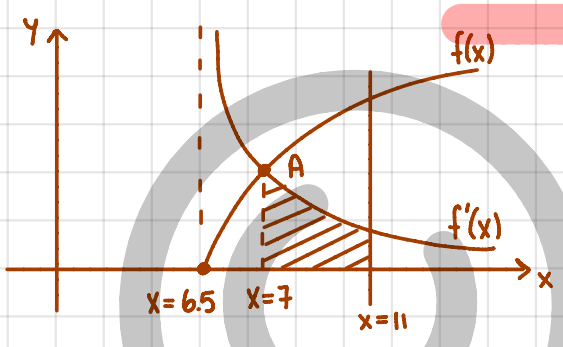


أ. (3) $f'(x)=\frac{x}{x\sqrt{2x-13}}>0$ دائمًا موجب اي الدالة تصاعدية بكل مجال تعرفها.

ب (1) $2x-13>0 \rightarrow 2x>13 \rightarrow$ م.ت: $x>6.5$

(2) $2x-13=0 \rightarrow 2x=13 \rightarrow$ $x=6.5$ خط تقارب عامودي

جـ.



النقطة A هي نقطة تقاطع $f(x)$ مع $f'(x)$:

$\frac{1}{\sqrt{2x-13}}=\sqrt{2x-13} \quad \backslash \cdot \sqrt{2x-13}$

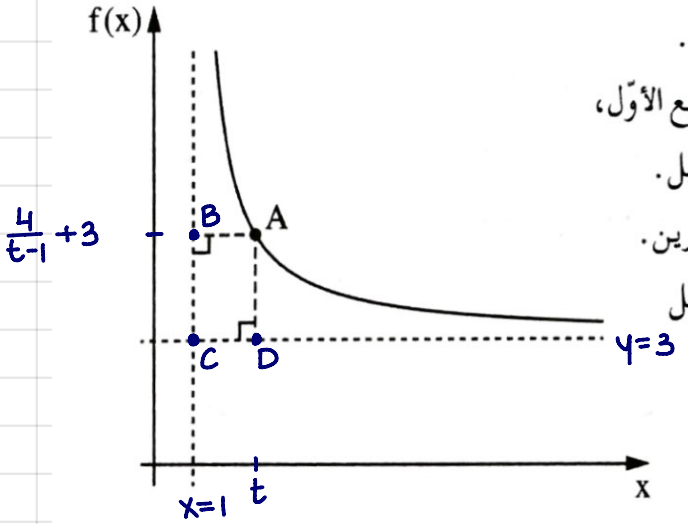
$1=2x-13$

$14=2x$

$x=7 \rightarrow y=\sqrt{2\cdot 7-13}=1 \rightarrow A(7,1)$

د. $S=\int_7^{11} f'(x)dx=(f(x))\Big|_7^{11}=\sqrt{2x-13}\Big|_7^{11}=\sqrt{2\cdot 11-13}-\sqrt{2\cdot 7-13}=3-1=2$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٨ موعد ب - سؤال ٨



8. أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)=\frac{4}{x-1}+3$ في الربع الأوّل.
من النقطة A، التي تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في الربع الأوّل،
مرّروا عمودين لخطَّي تقارب الدالّة $f(x)$، بحيث تكوّن مستطيل.

أ. جد معادلتَي خطَّي تقارب الدالّة $f(x)$ المعامدين للمحورين.

ب. جد إحداثيّات النقطة A التي بالنسبة لها محيط (g(t)) المستطيل هو أصغر ما يمكن (MIN).

جـ. احسب مساحة المستطيل الذي محيطه أصغر ما يمكن.

أ. خط تقارب عامودي: $x-1=0$ (مقام = 0) ⇐ $x=1$

خط تقارب افقي: $y=3$ (أكبر قوى لـ x بالبسط يساوي أكبر قوى لـ x بالمقام)

$f(x)=\frac{4+3x-3}{x-1}=\frac{1+3x}{x-1}$

ب. A تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$، نفرض ان الاحداثي x هو t ← الاحداثي y هو: $\frac{4}{t-1}+3$

⇐ طول اضلاع المستطيل: $AD=\frac{4}{t-1}+3-3=\frac{4}{t-1}$ ، $CD=t-1$

محيط المستطيل هو الدالة المطلوبة: $g(t)=2(t-1)+2\left(\frac{4}{t-1}\right) \longrightarrow \boxed{g(t)=2t-2+\frac{8}{t-1}}$

نشتق الدالة ونجد نقطة الـ MIN: $g'(t)=2+\frac{0\cdot(t-1)-1\cdot 8}{(t-1)^2}$

$\boxed{g'(t)=2-\frac{8}{(t-1)^2}=0}$

$2=\frac{8}{(t-1)^2}$

$2(t-1)^2=8 \quad \backslash:2$

$(t-1)^2=4$

$t^2-2t+1=4$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3 \quad t=-1$ (بالربع الأول A)

نفحص الجواب:

	(t=2) 3>t>1	t=3	(t=4) t>3
g'(t)	-6	0	10/9
g(t)	↘	MIN	↗

⇐ الاحداثي A: (3,5)

ج. طول اضلاع المستطيل: $CD=2$ ، $AD=2$

⇐ مساحة المستطيل: مساحة $AD \cdot 4 = 2\cdot 2$